

# 制御工学的世界観：線形制御の歴史から人の意思決定まで

前 匡鴻

e-モビリティ・テクノロジー

## 1 はじめに

我々は人生の中で何度も「最適な判断」に迫られる。その時々において、想定される状況や現在の環境、これまでの経験などを勘案して実行可能な行動をすることになる。図1に人間における意思決定のブロック線図を示す。例えば、自動車の運転を考えると、認知・判断・行動を繰り返し行っており、認知が誤差、判断が制御器、行動が制御入力と考えることができる。このような意思決定の流れは、制御工学において多く用いられている。JISの定義によれば、制御とは「ある目的に適合するように制御対象に所要の操作を加えること」と定義される[1]。制御工学の学問体系では、人間の持つ様々な目的意識に合わせて、それを実現する最適な判断を自動で行うように、数学と物理を駆使して様々な制御器が提案されてきた。このように、制御工学と人間の持つ目的意識は密接に関わっている。このことは、事実間に存在する一般的法則を求めるとする自然科学とは対象的な、極めて能動的な学問であると印象付けられる。

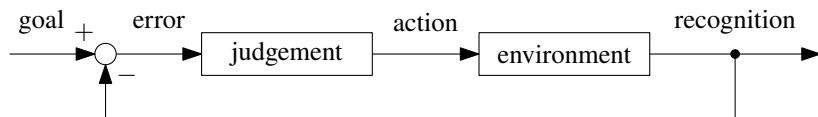
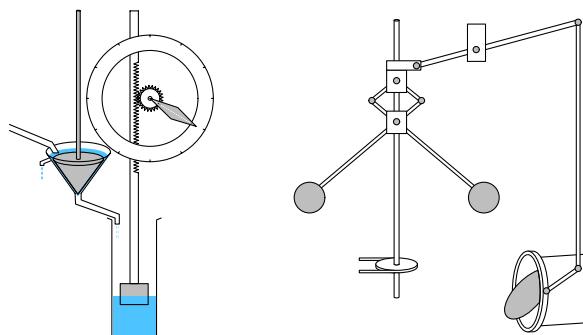


図1 人間による制御のブロック線図

長い歴史の中で、数学や物理を駆使して制御系を構築し、目的を達成しようとした例を図2に示す。図2(a)は紀元前300年頃に発明された“Ctesibius's water clock”と呼ばれ、水が貯まる速さを浮きで制御することにより、その水位を時計として用いたものである[2]。図2(b)は、西暦1769年の産業革命時に発明された“Watt's fly-ball governor”と呼ばれ、遠心力をうまく活用して蒸気機関のバルブを制御するものである[3]。このように、歴史の中では制御を実現するために直接物理現象が用いられてきた。近年では、コンピュータに代表される計算機の発達により、それらの制御則をアルゴリズムとして定式化し、プログラミングする制御理論が体系づけられている。



(a) クテシビオスの水時計 [2] (b) ワットの遠心力調速機 [3]

図2 歴史上の数学と物理の洞察による制御系

本節では、数多ある制御理論の中でも「線形制御理論」を主に取り扱う。その理由としては、計算機が処理する制御演算の多くは線形であるのに加え、世の中の数多の制御対象はもっぱら非線形であるが、基本的に制御したい動作

点で考えると、その微小範囲では線形に近似できることが多いいためである。また、制御の際に用いられる非線形や非凸な最適化も、計算機の演算の際は逐次線形化して求解する場合が多いという現実的な側面もある。例えば、図3に示すようなタンク系は非線形な制御対象として知られ、その応答は次のように示される。

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_0 - k_1 \sqrt{h_1} \quad (1)$$

ただし、 $Q_0$  を流入する水の体積、 $Q_1$  を流出する水の体積、 $A_1$  を底面積、 $h_1$  を水位、 $k_1$  を定数とする。このような、非線形システムであっても、 $h_1 = h_1^*$  の動作点周りの応答を考えることで、次のように線形システムとして扱うことができる。

$$\frac{d\Delta h_1}{dt} = -\frac{k_1}{2A_1\sqrt{h_1^*}}\Delta h_1 + \frac{1}{A_1}Q_0 \quad (2)$$

ただし、 $\Delta h_1$  は  $h_1$  の動作点  $h_1^*$  周りでの変化量を表す。

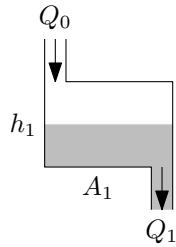


図3 タンク系

図4に線形制御理論の歴史の概要を示す[4,5]。1930年頃に古典制御理論が提案された。古典制御理論では、主に周波数領域を扱い、PID制御に代表されるような伝達関数を用いた制御を行なう。制御対象のモデルは必ずしも必要なく、エンジニアの直感に近いと言う利点を持つ。周波数領域の伝達関数の多くは複素数であり、複素関数論と多くの繋がりを持つ。

第二次世界大戦の後、1960年頃に Rudolf E. Kálmán らによって、現代制御理論が提案された。現代制御理論では、主に時間領域を扱い、状態空間表現を用いて制御対象と制御器を記述する。また、アポロ計画でカルマンフィルタが状態推定に使用された逸話からもわかるように、時間領域で記述される現代制御理論はコンピュータを用いた自動制御や最適化との組み合わせと相性がよく、多変数系への拡張も容易であるという利点を持つ。一方で、エンジニアの直感と結びつきにくいという欠点を持つ。状態方程式は行列で記述されるため、線形代数論と多くの繋がりを持つ。

その後、1980年頃に John Doyle らによって、ロバスト制御理論が提案された。ロバスト制御理論は、不確かさを定量的に考慮に入れて性能を保証するという、制御工学特有の、他の学問分野ではあまり見られない特徴を持つ。ロバスト制御理論は主に周波数領域で議論されることが多いが、現在は時間領域も組み合わせて一般化プラントにより定義された制御系設計 CAD が整備されている。

ロバスト制御の後も、複数の入出力を考慮した「多変数制御」や、離散時間を考慮した「サンプル値制御」、制御対象のモデルとリアルタイム最適化を組み合わせた「モデル予測制御」など、多くの先進的な制御理論が提案されている。

本節では、「古典制御」「現代制御」「ロバスト制御」「多変数制御」の順で線形制御理論の歴史の変遷を紐解き、その中で目的意識に合わせて人類はどのようにして制御法を確立してきたか、ミクロな視点としてそこから我々の人生の中の意思決定において学べることは何か、について順に紹介する。また、それらの意思決定法は、2020年初頭から COVID-19 により不安定化した世界情勢を安定化する施策の中でどう解釈できるか、をマクロな視点から読み解く。終わりに、ミクロとマクロの視点から示唆される 2 つのメッセージを述べて本節の結びとする。

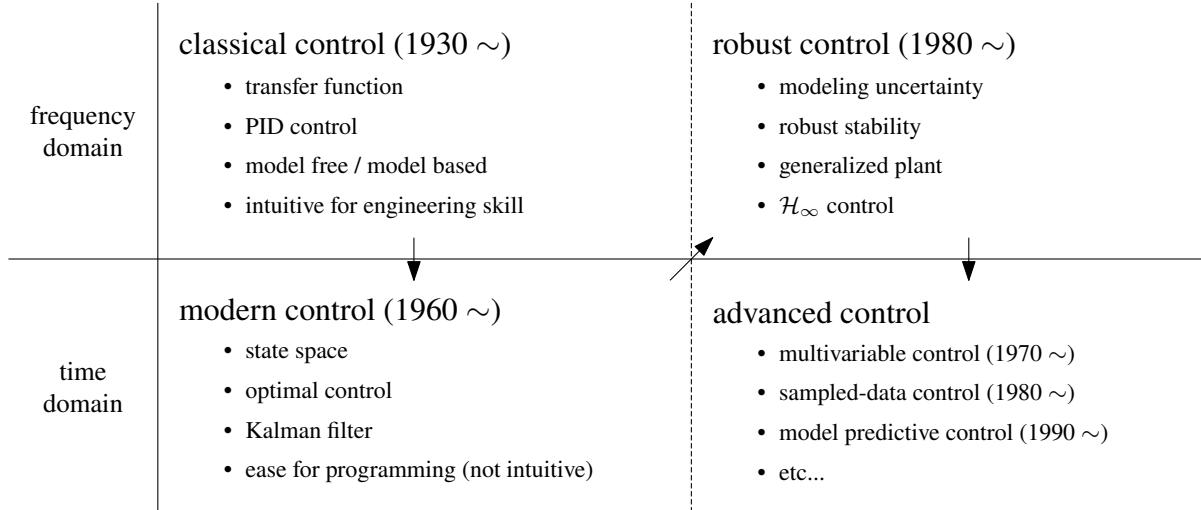


図 4 線形制御理論の歴史

## 2 古典制御：性能と安定性のトレードオフ

### 2.1 ナイキストの安定判別法

制御工学においてまず大切なのは、制御系の安定性を保証することである。図 5 にフィードバック制御のブロック線図を示す。周波数領域で考える古典制御においては、ナイキストの安定判別法が広く用いられる。図 6 にナイキスト線図の例を示す。安定な制御対象に対するナイキストの安定判別法では、開ループ伝達関数  $L(s)$  において、複素平面の右半平面を周回する Nyquist D-contour に対する軌跡が特異点  $s = -1$  を内側に持たないことを安定条件とする。このことは、複素関数論における「偏角の定理」から説明する事ができる [6]。システム  $g(s)$  がゲイン  $k$ 、極  $p$ 、零点  $z$  によって次のように表されるとする。

$$g(s) = k \frac{\prod_{j=1}^{n_z}(s + z_j)}{\prod_{i=1}^{n_p}(s + p_i)} \quad (3)$$

その時、ある経路  $\mathcal{C}$  の内側にある極と零点の数をそれぞれ  $P$  と  $Z$  としたとき、その線積分は  $\theta_g(\mathcal{C}) = 2\pi(Z - P)$  と表される。また、開ループと閉ループの特性多項式  $\phi_{ol}$  と  $\phi_{cl}$  により、開ループ伝達関数は

$$1 + L(s) = \frac{c \cdot \phi_{cl}}{\phi_{ol}} \quad (4)$$

(ただし、 $c$  は定数) と表されることに注目すると、閉ループを安定、つまり、 $\phi_{cl}$  の線積分が 0 (特異点を含まない) になるように、 $\phi_{ol}$  の線積分と  $1 + L(s)$  のナイキスト線図の軌跡が関係性を持てば良いことがわかる。このように、必ずしもパラメトリックなモデルを必要とせず、周波数応答から安定性を判別できるナイキストの安定判別法は、制御工学で実用上広く用いられている。

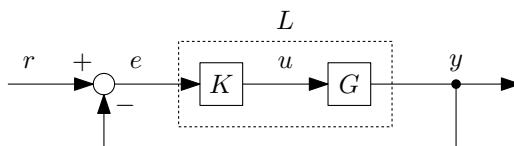


図 5 フィードバック制御のブロック線図

### 2.2 ゲイン安定化と位相安定化

図 6 におけるナイキストの安定判別法から「ゲイン安定化」と「位相安定化」の 2 つの安定化指針が示される。ゲイン安定化については、 $L(s)$  のゲインを小さくすることで  $s = -1$  から  $L(s)$  を遠ざけるものである。この手法は、

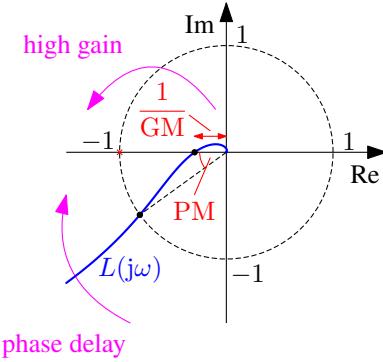


図 6 ナイキスト線図におけるゲイン余裕と位相余裕

位相によらないため制御対象のモデルが詳細にわからない場合も有効であるが、ゲインが下がるため性能は悪化する。位相安定化については、 $s = -1$  を跨がない方向に位相を進める/遅らせることにより、 $s = -1$  から  $L(s)$  を遠ざけるものである。この手法は、制御対象の位相の情報が必要であるため、モデルが確かな場合に有効である。このように、制御対象の安定化においては、ゲインと位相の双方を考慮して制御器を設計することが望ましい。

### 2.3 スモールゲイン定理

スモールゲイン定理 [7] とは、「開ループ伝達関数  $L(s)$  において  $\|L(j\omega)\| < 1$  であれば閉ループ系は安定」という定理である。この定理は、ナイキスト線図上の  $L(s)$  の軌跡が単位円内に存在する限り、 $s = -1$  を含まないので、閉ループ系が不安定化することはないと解釈することができる。このようなシステムは安定である一方で、ゲインが低いことから性能があまり高くないというトレードオフを持つ。

### 2.4 古典制御からの示唆：ゲインと位相の双方の考慮

古典制御における性能と安定性のトレードオフが「ゲイン」と「位相」に大きく関わっている [8]。ここに、我々の人生における意思決定のプロセスを当てはめると、ゲインが「気持ちの大きさ」、位相が「行動するタイミング」と考えることができる。高い能力を発揮するためには気持ちの大きさは不可欠であるが、意思決定をより効果的にする、不安定化させないためには、いつ行動を起こすかのタイミングも大切である。このように、ゲインと位相の双方を考慮することは、我々の人生における意思決定プロセスでも考慮すべき要素であると言える。

## 3 現代制御：最適制御の発展

### 3.1 目的関数の設計と重み付け

現代制御理論は主に図 7 に表されるような状態空間表現で制御を行う。現代制御における制御器設計においてよく合わせて用いられるものに数理最適化がある。数理最適化を用いた制御は最適制御と呼ばれ、ある目的関数に対して最適な制御を実現する。つまり、人間の目的意識、その制御対象をどのように制御したいかということがその目的関数に反映されてている必要があると言える。

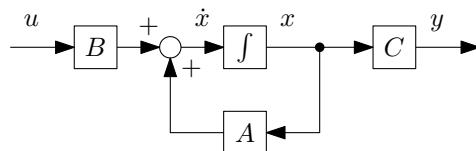


図 7 状態空間表現のブロック線図

### 3.2 LQR と制約条件：絶対制約と考慮制約

最適制御の 1 つに線形 2 次レギュレータ (Linear Quadratic Regulator : LQR) がある。LQR では次の目的関数を最小化するように制御入力  $u(t)$  を決定する。

$$\underset{u(t)}{\text{minimize}} \quad \mathcal{J} = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \quad (5)$$

2 次計画最適化問題は、制約条件がない場合 Riccati 方程式より最適解が解析的に求まっている。最適化計算は、多くの場合において制約条件の考慮が必要となる。制約条件には、大きく分けて絶対制約 (hard constraint) と考慮制約 (soft constraint) の 2 種類の制約条件がある。絶対制約は、破ることのできない制約条件で、厳密にその制約条件が守られる一方で実行可能解が存在しない可能性がある。考慮制約は、目的関数にペナルティ関数として与えられ、できるだけその制約を破らないように最適化が行われる。これらの制約条件を考慮する場合は、解析的に最適解が求まらない場合も多く、逐次線形化や繰り返し計算などの数値最適化手法を用いて求解することになる。

### 3.3 LQG の安定余裕

Linear Quadratic Gaussian (LQG) レギュレータは最適制御の 1 つである LQR 制御と、ノイズの分散に合わせて最適にオブザーバゲインを決定するカルマンフィルタ (Kalman Filter: KF) を組み合わせたものであり、次の目的関数を最小化するように制御入力  $u(t)$  を決定する。

$$\underset{u(t)}{\text{minimize}} \quad \mathcal{J} = E \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \right] \quad (6)$$

図 8 に LQG レギュレータのブロック線図を示す。LQG は、提案された当初は理想的な最適制御器だと多くの研究者が期待していたが、実際には「保証される安定余裕が存在しない」という、安定性に不安の残る制御器であると言ったことが Doyle らによって示されている [9]。この論文では、1 入力 1 出力の 2 次のシステムに LQG を適用し、ゲイン余裕が小さい場合を反例として用いている。 $d(\sigma)$ ,  $f(q)$  をそれぞれ、カルマンフィルタと LQR のゲイン、 $m$  を十分小さい摂動とした場合、次の 2 式を満たす場合、システムは安定である。

$$\begin{cases} d + f - 4 + 2(m-1)df > 0 \\ 1 + (1-m)df > 0 \end{cases} \quad (7)$$

しかし、これらの式は十分大きい  $d(\sigma)$  および  $f(q)$  の場合、満たされないため、保証された安定余裕は存在しないと言える。

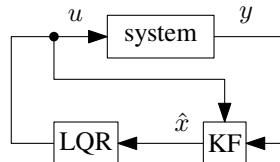


図 8 LQG レギュレータのブロック線図

### 3.4 現代制御からの示唆：人生は最適化できない

2021 年 3 月に東京大学を定年退職された堀洋一名誉教授のエッセイ [10] に「人生は最適化できない」という一節がある。この示唆は、「人生の目的関数はスカラーではないから最適化はまずできない」「さまざまな局面におけるローカルオプティマムの積み重ねはトータルオプティマムにならない」という 2 点から理解することができる。意思決定における人間の気持ちは、多くの場合ベクトル空間であり、そのベクトル空間に張られる目的関数は重み関数に大きく依存する。その目的関数の基底は独立とは限らないし、目的関数自身も時に非線形で非凸である。最適な人生を実現することは難しいが、自分自身の重み関数を持ち、運命に従いながら逐次最適化を常に怠らないことで、より良い人生を歩めるのではないかだろうか。

## 4 ロバスト制御：不確かさの考慮

### 4.1 不確かさのモデル化

現代制御における安定余裕の保証しにくさに呼応するような形で、不確かさを定量的に考慮するロバスト制御が発展した[11]。ロバスト制御では、図9に示すように、制御対象のモデル  $G$  に対して、規格化された構造的不確かさ  $\Delta$  と重み行列  $W_I, W_O$  を用いて制御対象の不確かさ  $E$  をモデル化し、不確かさを含む制御対象のモデル  $G_p = G + E$  に対して安定性を保証する制御器設計を行う。

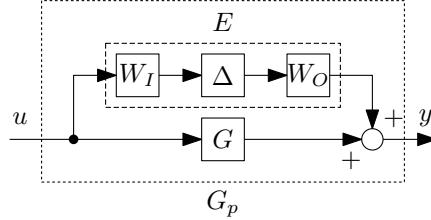


図9 不確かさを含む制御系のブロック線図

### 4.2 $\mathcal{H}_2$ 制御と $\mathcal{H}_\infty$ 制御

ロバスト制御理論は図10に示す一般化プラントに対する体系的な最適制御器設計法が整備されている。一般化プラントの枠組みでは、外生信号  $w$ （例：指令値  $r$ 、外乱  $d$  など）に対する評価量  $z$ （例：誤差  $e$  など）を最適化するようにフィードバック制御器  $K$  を設計する。一般化プラント  $P$  は次のように定義される。

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

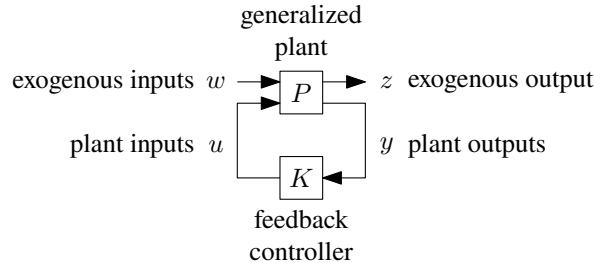


図10 一般化プラントのブロック線図

最適な制御器を設計するにあたり、主に  $\mathcal{H}_2$  制御と  $\mathcal{H}_\infty$  制御の2種類の枠組みが用いられる[12]。 $\mathcal{H}_2$  制御と  $\mathcal{H}_\infty$  はそれぞれ次の目的関数を最小化するように制御器  $K$  を設計する。

$$\underset{K}{\text{minimize}} \quad \mathcal{J} = \begin{cases} \mathcal{H}_2 \text{ control : } \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{T} z^\top(t) z(t) dt \right\}} = \|F_l(P, K)\|_2 \\ \mathcal{H}_\infty \text{ control : } \max_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_l(P, K)\|_\infty \end{cases} \quad (9)$$

ただし、 $F_l(P, K)$  は次のように定義される。

$$z = F_l(P, K)w \quad (10)$$

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (11)$$

$\mathcal{H}_2$  制御は全体的な性能を考慮するため、性能が出やすい一方で安定性を保証しにくいという欠点を持つ。そのため、ロバスト制御理論では  $\mathcal{H}_\infty$  制御が主に用いられる。無限大ノルムは  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  の関係式を満たすため、 $\mathcal{H}_\infty$  制御は安定性を理論に保証することが比較的容易であるという利点を持つ。ただし、 $\mathcal{H}_\infty$  制御は最悪の場合を想定した設計を行うため、保守的になりやすく性能が出にくいという欠点も持つ。

### 4.3 内部モデル原理

内部モデル原理 [13] とは、「外生信号のモデルを持つレギュレータは構造的に安定である」というものである。このことから、フィードバック制御器を設計する際には、想定される外生信号（指令値や外乱など）のモデルを制御系が含んでいることが望ましいと言える。実際、ロバスト制御理論の制御系設計 CAD では基本的に定義された外生信号や不確かさのモデルの次数に合わせてフィードバック制御器が設計される。そのため、フィードバック制御器の次数が大きくなりすぎるという問題がしばしば指摘され、その結果、構造的フィードバック制御器のロバスト設計問題の研究 [14] に繋がっている。

### 4.4 ロバスト制御からの示唆：不確かさの考慮と保守性

ロバスト制御理論では、主に  $\mathcal{H}_\infty$  制御を用いて、定量的にモデル化した不確かさ含む制御対象のモデルに対して、最悪の場合でも安定性を保証する制御器設計問題を扱った。 $\mathcal{H}_\infty$  制御において各周波数点で考慮する不確かさはナイキスト線図で図 11 のように示される。図 11 から、不確かさは主にゲインとして考慮されており、 $\mathcal{H}_\infty$  制御において位相はうまく活用されていないことがわかる。これが、ロバスト制御理論が保守的になりやすい要因の 1 つである。

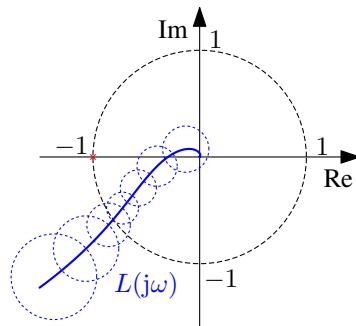


図 11 ナイキスト線図におけるゲインの不確かさ

我々の人生における意思決定のプロセスにおいても、想定される困難や不確かさは存在し、それを考慮した意思決定を下す必要がある。そのような想定される困難や不確かさをゲインだけでなく位相も含めて詳細にモデル化できた場合、保守的すぎないより性能の出る意思決定ができると言うことが示唆される。そのためには、想定される事象の大きさだけでなくそのタイミングや周期性も含めて、過去の経験からモデル化する取り組みを常日頃行う必要があると考えられる。

## 5 多変数制御：干渉の考慮

### 5.1 多変数系の非干渉化

多変数系の制御は、まず各入力と各出力のペアを決めて、そのペア以外の伝達特性が低くなるように非干渉化を行うと制御しやすくなる。非干渉化においては、主に制御対象の前に前置補償器を用いた入力非干渉化と制御対象の後に後置補償器を用いた出力非干渉化が存在する。例えば、図 12 のように和と差のモードで干渉している多変数系を考えると、各対角成分が 1 になるように、前置補償器  $T_u = G^{-1}$  を設計することにより、各入出力を非干渉化することができる。しかし、実際には制御対象  $G$  は静的システムに限らず高次の動的システムであることも多く、その場合、静的な補償器を用いて完全に非干渉化することは困難となる。その場合、関心のある周波数帯域において非干渉化されるように補償器を設計することになる。このように、多変数制御においては、どの入力でどの出力を制御すべきか、また、それ以外の入出力間の影響をいかに小さくするかが課題となる。

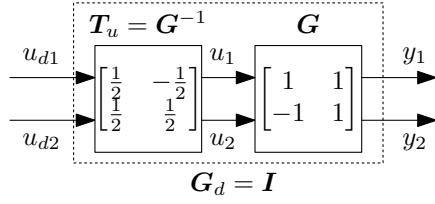


図 12 入力非干渉化のブロック線図

## 5.2 集中制御と分散制御

ある程度非干渉化された多変数系の制御対象に対してフィードバック制御器を設計する場合、「集中制御」と「分散制御」の 2 つの設計指針が存在する。図 13 に 2 入力 2 出力系のフィードバック制御のブロック線図を示す。集中制御では、完全には非干渉化されていないことを考慮して  $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$  の 4 つすべての制御器を設計する。この手法は、大域最適解が得られる一方で、設計結果が複雑で、また、入出力数が増えるに合わせて設計する必要のある制御器の数も二乗で増加してしまうという欠点がある。分散制御では、制御対象がある程度非干渉化されているという前提で、対角成分の  $K_{11}$  と  $K_{22}$  のみ設計を行い、 $K_{12} = K_{21} = 0$  とする。この手法は、局所最適解であるが、設計される制御器が各自由度ごとに直感的で、実用上は集中制御よりも分散制御が用いられる場合が多い。また分散制御で制御器を設計する場合は、早いダイナミクスのループから制御器を設計して閉じていく sequential loop closing や、干渉の影響を考慮しつつ各軸制御器を設計する方法などが存在する。

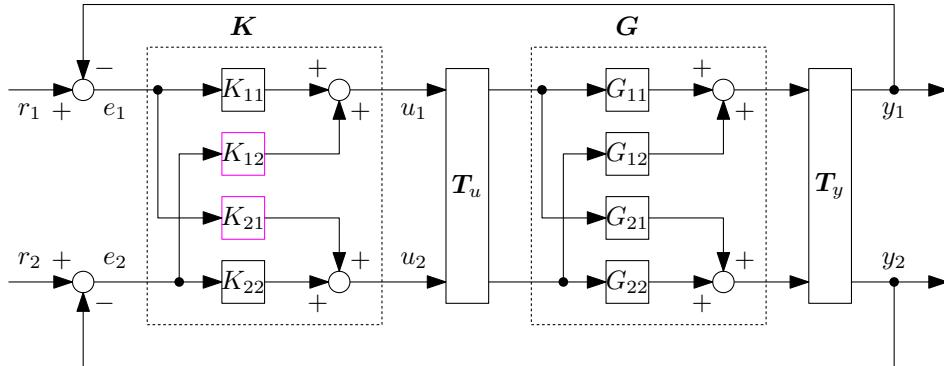


図 13 集中制御と分散制御のブロック線図

## 5.3 構造的不確かさと DK iteration

多変数制御において不確かさを考慮してロバスト制御器を設計する手法を紹介する [6, 15, 16]。図 14 に DK iteration で考慮される構造的不確かさのブロック線図を示す。この設計手法では、図 14(a) における、 $\Delta$  を構造的不確かさとして取り出し、それ以外の部分を  $M$  として定義する。そして、 $\Delta$  と  $M$  に対してそれぞれ行列  $D$  でスケーリングを行ったブロック線図を図 14(b) に示す。また、 $u_\Delta$  と外生信号  $w$  を入力、 $y_\Delta$  と評価量  $z$  を出力とする  $N$ - $\Delta$  structure の  $N$  を次のように定義する。

$$N : \begin{bmatrix} y_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\Delta \\ w \end{bmatrix} \quad (12)$$

DK iteration では、「固定された  $N$  に対して構造的特異値  $\mu(N) = \bar{\sigma}(DND^{-1})$  を各周波数で最小化する  $D(j\omega)$  を設計」する D step と、「固定された  $D(j\omega)$  に対して  $\|DND^{-1}\|_\infty$  を最小化する  $K$  を設計」する K step の 2 つのステップを反復することにより、不確かさの非干渉化と多変数系のフィードバック制御器設計の設計を繰り返し行い、最適解に近づけていく。

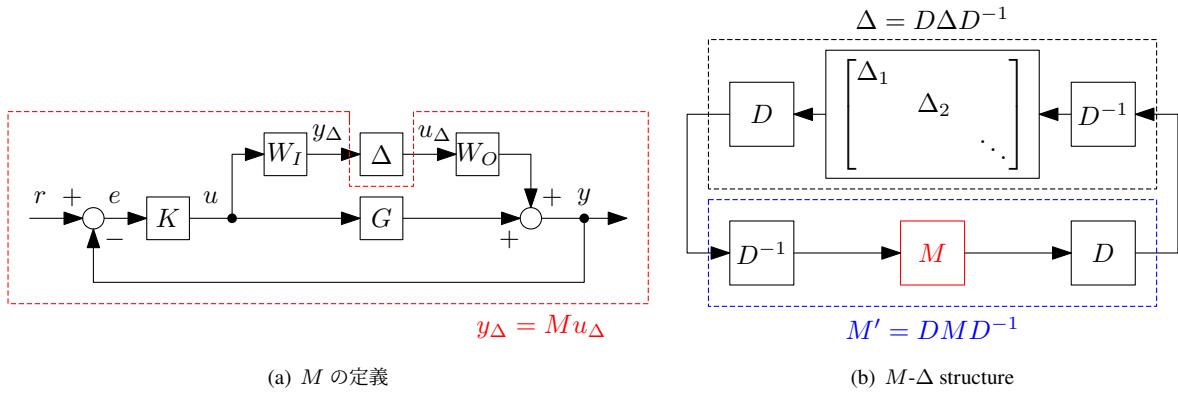


図 14 構造的不確かさを持つフィードバック制御のブロック線図

## 5.4 多変数制御からの示唆：構造把握と反復最適化

多変数制御においては、「制御対象の非干渉化」と「干渉を考慮した制御器設計」が大切であるということがわかる。我々が人生の中で意思決定をする場合においても、考慮すべき事項が 1 つだけのことは稀で、複数の事象が複雑に絡み合ったシステムに対して最適な判断を下していく必要がある。そのような状況においても、「どの変数を動かすためにはどの入力を制御することが効果的なのか」や「ある変数が変動した際に他の変数が受ける影響を考慮した意思決定」を行っていくことが必要であると考えられる。DK iteration に見られるような、非干渉化と制御器設計の反復を行うことで準最適解に近づけていくような意思決定プロセスが望まれる。

## 6 事例：COVID-19 による世界情勢の不安定化

### 6.1 世界情勢のゲイン安定化

2020 年初頭から蔓延した COVID-19 により、全世界的に情勢が不安定化したことは各国の意思決定プロセスの違いを浮き彫りにした。COVID-19 の感染の広がり、感染が発散していくシステムを制御するために、各国が国民に対して多くの働きかけを行った。図 15 に政府による国民のフィードバック制御のブロック線図を示す。不確かさや外乱のモデルが未知の場合、安定化のためにまず行われる手法がゲイン安定化である。たとえば、「オンラインミーティングの促進」「国境の封鎖による国家間の行き来の停止」「外出規制」「マスクの着用」などはいずれも、感染症の発散を抑え安定化するためのゲイン安定化として働いたと考えられる。このゲイン安定化は、先述のスモールゲイン定理からも解釈する事ができる。一方、ゲイン安定化は位相の情報を考慮していないことや、性能と安定性のトレードオフを考慮していないことから、性能の観点では悪化してしまうことに注意されたい。今後、感染症が再拡大する場合は、2020 年から 2022 年までの 2 年間の COVID-19 の動きから、そのナイキスト周波数である 1 年周期の動きまではある程度モデル化できると考えられ、そのモデルの位相も考慮した政策が実行されることを期待したい。余談ではあるが、COVID-19 の感染の広がりの際に盛んに報道された「オーバーシュート」は制御工学の用語のそれとは異なる意味で使用されており、どちらかというと「発散」のほうが制御工学としての意味合いは近い。もし、指令値を 0 としているのであれば、それを上回る感染者数はすべて「オーバーシュート」と言えなくもないが、「発散」のほうが望ましい語用であったと考えられる。

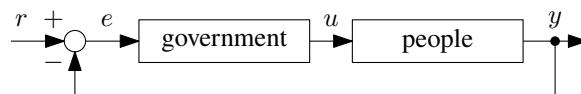


図 15 政府による国民のフィードバック制御のブロック線図

## 6.2 行動規制から見る各国の目的の違い

2020年初頭すぐに各国が揃ってゲイン安定化に取り組んだ後、各国の規制の方法や規制緩和の取り組みのタイミングにおいてはそれぞれ違いが見られた。図16に、COVID-19による外出制限における各国の動きの変化を時系列で示す[17]。欧米では、規制と緩和が比較的周期的に繰り返されているのに対して、アジアでは在宅推奨や外出禁止の期間が長く続いていることがわかる。また、アフリカでは2021年まで厳しく規制されていたが、2022年に入つてから急速に規制緩和が進んでいることがわかる。これらの政府の意思決定の背景には、各国それぞれ異なる目的関数の存在が大きく関わっていると考えられる。感染症による死者数を最小化するのか、経済活動を優先するのか、また、それらを比較するにあたっても、感染者数、ICU患者数、GDP、株価など多数の要素の何を評価量とするのか、それらの評価量にどのように重み関数をかけるのか、考慮すべき事象は無数に存在する。各国で制約条件も異なり、それらの制約条件を絶対制約とするのか、考慮制約にするのかでも政策は大きく変わってくる。

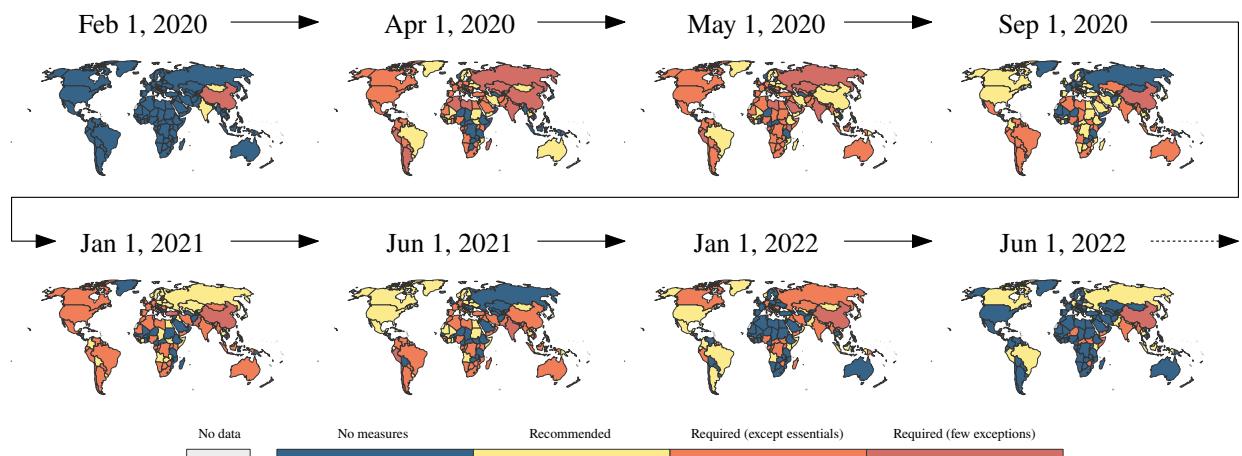


図16 COVID-19による外出制限 [17]

## 6.3 国民の多様性と制御対象の違い

先述の「行動規制の政策の背景にある重み関数」は各国の国民の多様性を制御対象の違いとして考える事により解釈できる。本節では、世界の各地域で産業大国として名高い「アメリカ」「ドイツ」「中国」を「日本」と比較する形で代表して取り上げる。1つ目の例として、図17に各国の年齢別的人口と増減の予測を示す[18]。将来的な高齢者の増加、人口減少が予測される日本や中国のような国においては、「感染症による死者数」を最小化するような政策が行われると予想される。また、これからもある程度人口増加が予想されるアメリカやドイツのような国では比較的「産業の活性化」を意識した政策が行われると予想される。

2つ目の例として、図18に各国において各宗教を信仰する人の割合を示す[19]。各国で信仰されている宗教の違いは、各国の政府の重み関数の設計に暗示的に大きく関わっていると考えられる。キリスト教の教えや仏教の教えなど各宗教の教義に見られる考え方、各国の意思決定において国民の支持を集められるかの鍵となることは想像に難くない。また、日本や中国など「無宗教」の国民が多い国においては、歴史的背景や周囲の人間の考え方、科学振興や政党の主張などが大きく影響していると考えられる。

その他、社会的な違いとしては、歴史的な背景からデモやストライキが発生しやすい国は、政府から見れば比較的不安定な制御対象であり、それらに対しては、安定化のために頻繁に制御入力の更新が行われると考えられる。一方、社会的圧力がローカルフィードバックとして働き、比較的内部安定性の高い日本などでは、政府が積極的に動かなくても不安定化しにくいといった状況の違いも存在する。

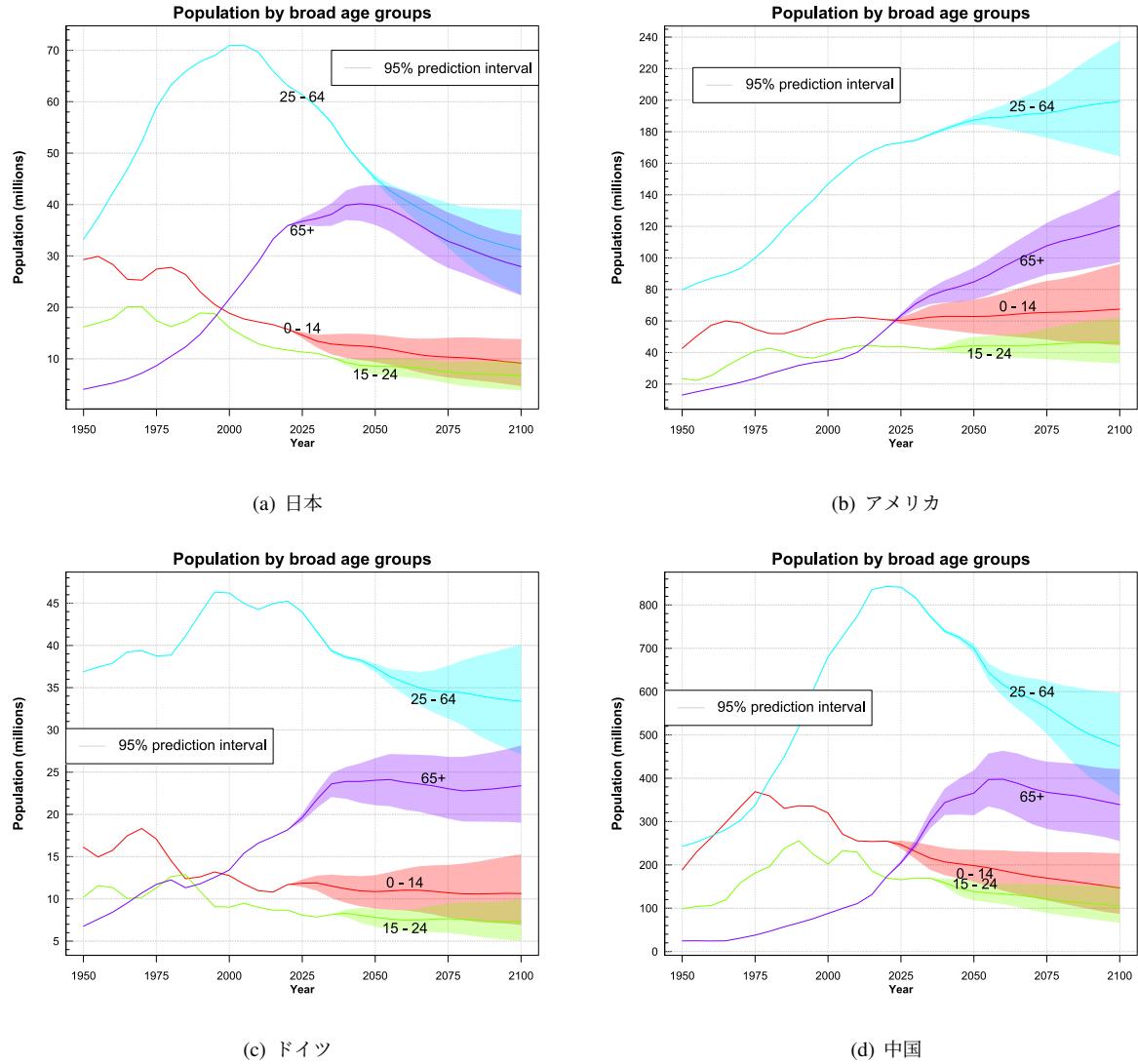


図 17 年齢区分別人口 [18]

## 6.4 各国間往来の制限と多変数制御

最後に、COVID-19 による国家間の人の往来への影響への考察を述べる。図 19 に、日本と他国の 2 国間における人の往来の概念をブロック線図で示す。第二次世界大戦後の社会において、航空機の発達とともに急激に国家間の人の往来が活発化しグローバリゼーションが進んだ。このことは、日本の高度経済成長とも密接に関わっており、図 19において、各入力が  $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$  の単位入力としたとき、日本側の出力  $y_1$  のゲインが  $\|G_{11}\| + \|G_{12}\|$  となることから、国家間往来のなかった場合の  $\|G_{11}\|$  からハイゲイン化し、高性能化していると解釈できる。一方で、COVID-19 に対する国家間往来の制限は  $G_{12} = G_{21} = 0$  となるように解釈でき、もちろんゲイン安定化の手法としては適切であるが、ゲインが  $\|G_{11}\|$  に下がっていることから、性能の面では低下していると理解できる。これから世の中では、これまで未知であった COVID-19 をモデル化し、どの要素が感染症拡大に繋がりどの要素はハイゲイン化可能であるかという非干渉化と、その新たな非干渉化システムに対する新しい制度設計を反復して行い、新しい準最適点に近づけていく取り組みが必要なのではないだろうか。

## 7 おわりに

本節では、線形制御理論の発展の歴史の変遷を読み解き、その中で、目的意識に合わせて人類はどのようにして制御法を確立してきたか、また、そこから我々の人生の中の意思決定において学べることは何か、について紹介した。

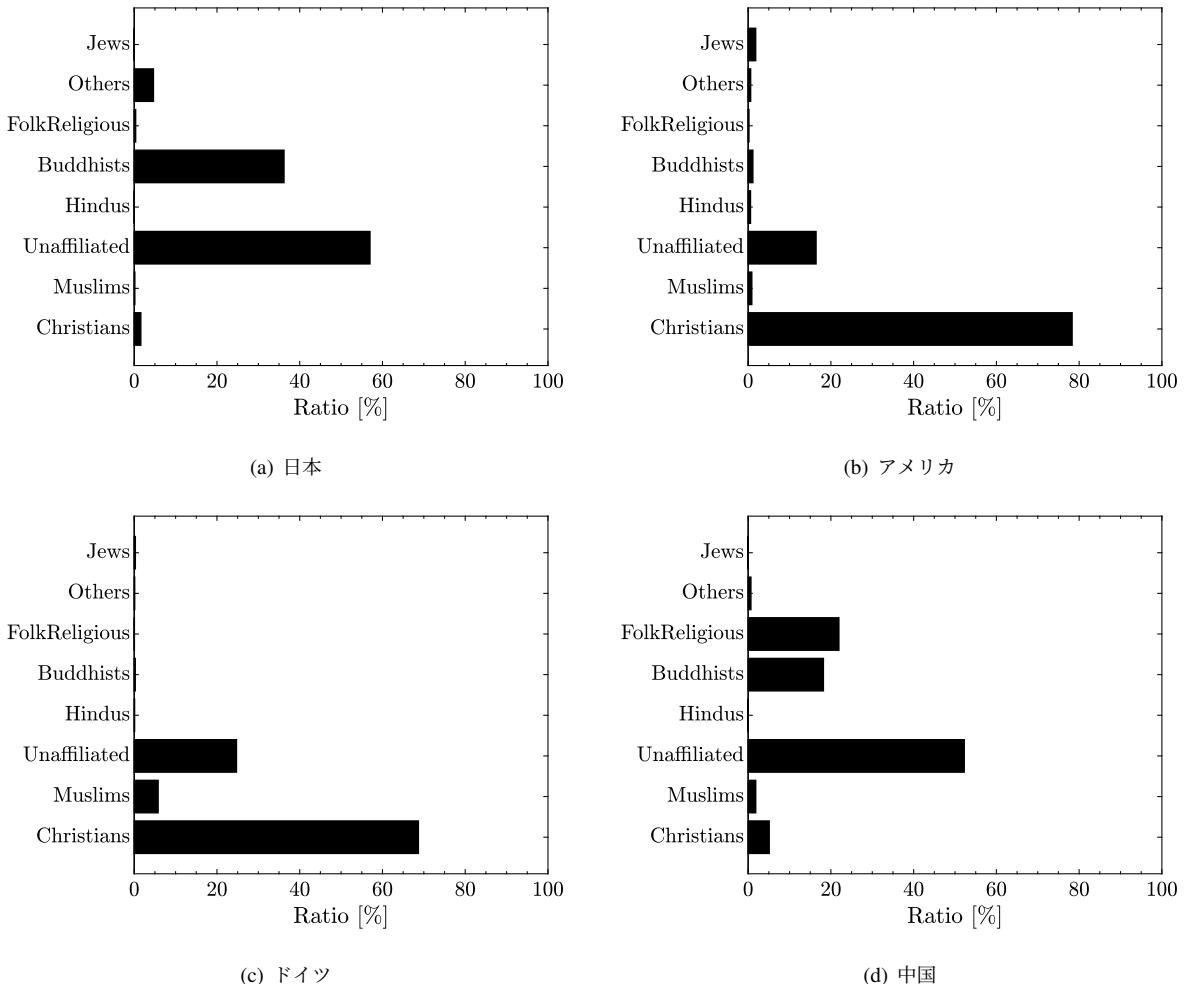


図 18 宗教別人口の割合 [19]

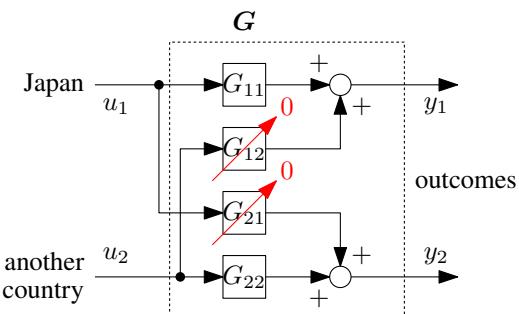


図 19 国際交流のブロック線図

これらの事例を通じて、ミクロ、マクロの側面から 2 つのメッセージが示唆される。まず、ミクロの側面としては、「我々は 1 人 1 人それぞれの人生の目的関数と制約条件を持ちゲインと位相の両面を考慮して繰り返し最適化を試みることでより良い意思決定に繋がる」ということである。人生の目的関数は多変数空間であり、大域最適解が得られるとは限らないが、より良い意思決定には近づくと考えられる。次に、マクロの側面としては、「集団を率いるものは合理的な重み関数を持ち性能と安定性のトレードオフの中で集団を導くと良い」ということである。集団において各々が異なる重み関数を持つ中で、どのようにして妥当な重み関数を設計し 1 つの目的関数に繋げていくか、考慮すべき変数を漏れなく被りなく考慮できるかが鍵になると考えられる。

本節で取り上げた線形制御理論は、非線形性まで考慮した制御理論全体の中でもごく限られた範囲の内容であるが、そこから示唆されることから、我々の人生に学べることは多く存在する。近年、特に注目を集める機械学習を始め、これまで先人達の研究で培われてきた制御理論全般が我々の将来に資する可能性は非常に高い。近い将来、人工

知能（Artificial Intelligence : AI）によるシンギュラリティの到来が予測される中、人類の幸福の目的関数を完全に理解したAI [20] は人類を導く神になりうるだろうか [21]？もしその時代が来到了たとき、我々は神により良く導いてもらうために、我々自身の目的関数と制約条件を説明できることが望ましいのではないか。

## 参考文献

- [1] 日本工業規格、自動制御用語 一般 JIS Z 8116-1994 (1994).  
URL <https://kikakurui.com/z8/Z8116-1994-01.html>
- [2] C.-G. Kang, Origin of Stability Analysis: Ön Governors by J.C. Maxwell, IEEE Control Systems Magazine 36 (5) (2016) 77–88.  
URL <http://dx.doi.org/10.1109/mcs.2016.2584358>
- [3] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, Control System Design, Prentice Hall, 2000.
- [4] G. F. Franklin, J. Powell, A. Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, 7th Edition, Addison-Wesley, 2014.
- [5] 足立修一, モデル予測制御の基礎, 日本ロボット学会誌 32 (6) (2014) 499–502. doi:10.7210/jrsj.32.499.
- [6] S. Skogestad, I. Postlethwaite, Multivariable Feedback Control, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [7] G. Zames, On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems Part one: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity, IEEE Transactions on Automatic Control 11 (2) (1966) 228–238. doi:10.1109/TAC.1966.1098316.
- [8] B. G. Stein, Respect the unstable, IEEE Control Systems 23 (4) (2003) 12–25. doi:10.1109/MCS.2003.1213600.
- [9] J. Doyle, Guaranteed margins for LQG regulators, IEEE Transactions on Automatic Control 23 (4) (1978) 756–757. doi:10.1109/TAC.1978.1101812.
- [10] 堀洋一, 研究者を目指す普通の学生諸君に (1991).  
URL <http://hori.k.u-tokyo.ac.jp/essay/kenkyuu.html>
- [11] J. Doyle, Robust and optimal control, in: Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 2, IEEE, 1997, pp. 1595–1598. doi:10.1109/CDC.1996.572756.
- [12] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis, State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H\infty$  control problems, IEEE Transactions on Automatic Control 34 (8) (1989) 831–847. doi:10.1109/9.29425.
- [13] B. A. Francis, W. M. Wonham, The internal model principle for linear multivariable regulators, Applied Mathematics & Optimization 2 (2) (1975) 170–194. doi:10.1007/BF01447855.
- [14] P. Apkarian, D. Noll, Structured  $H\infty$ -control of infinite-dimensional systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control 28 (9) (2018) 3212–3238. doi:10.1002/rnc.4073.
- [15] J. Doyle, Analysis of feedback systems with structured uncertainties, IEE Proceedings D Control Theory and Applications 129 (6) (1982) 242. doi:10.1049/ip-d.1982.0053.
- [16] M. Safonov, Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems, IEE Proceedings D Control Theory and Applications 129 (6) (1982) 251. doi:10.1049/ip-d.1982.0054.
- [17] Global Change Data Lab, COVID-19: Stay-at-Home Restrictions (2022).  
URL <https://ourworldindata.org/covid-stay-home-restrictions>
- [18] Department of Economic and Social Affairs, World Population Prospects (2019).  
URL <https://population.un.org/wpp/Graphs/DemographicProfiles>
- [19] World Population Review, Religion by Country (2010).  
URL <https://worldpopulationreview.com/country-rankings/religion-by-country>
- [20] 成田悠輔, 22世紀の民主主義-選挙はアルゴリズムになり、政治家はネコになる, SBクリエイティブ, 2022.
- [21] 松本徹三, AIが神になる日 - シンギュラリティーが人類を救う, SBクリエイティブ, 2017.