

# 多入力多出力系に対する完全追従制御における 特異値分解を用いた状態変数軌道生成

前 匡鴻\*, 大西 亘, 藤本 博志 (東京大学)

State Trajectory Generation for MIMO PTC using Singular Value Decomposition  
Masahiro Mae\*, Wataru Ohnishi, Hiroshi Fujimoto (The University of Tokyo)

In multirate feedforward control, it is necessary to calculate the state trajectory from the output trajectory in order to achieve perfect tracking control on the state trajectory. In this paper, we calculate the state trajectory for a multi-input multi-output (MIMO) system from the output trajectory using singular value decomposition. We also propose to use the state trajectory generation based on a time axis reversal when the inverse system is unstable. This method improves the general applicability of multirate feedforward control for MIMO system.

キーワード：状態変数軌道生成, 特異値分解, 時間軸反転, マルチレートフィードフォワード制御, 多入力多出力系, 超精密位置決めステージ

(state trajectory generation, singular value decomposition, time axis reversal, multirate feedforward control, multi-input multi-output system, high-precision stage)

## 1. 序 論

マルチレートフィードフォワード制御は精密位置決めステージやハードディスクドライブといった精密なシステムの制御に広く用いられている [1]。マルチレートフィードフォワード制御はデジタル制御における離散化による不安定零点の問題を解決し完全追従制御を達成する [2]。完全追従制御は「全てのサンプル点において目標値に追従誤差 0 で系を完璧に追従させる制御手法」と定義される [3]。マルチレートフィードフォワード制御を用いて制御されている精密位置決めステージは半導体や液晶パネルの製造において欠かせない装置であり, 半導体産業の躍進により社会における需要が年々増加しており高性能化が求められている [4]。

従来の精密位置決めステージは動作方向以外に対して機械的拘束のなされた 1 自由度系であったが, 近年, さらなる精密化の要求から, 機械的な拘束を無くしエアベアリングなどにより浮上した 6 自由度系として制御する試みがなされている [5]。6 自由度系に代表される多入力多出力 (multi-input multi-output : MIMO) 系においては, 各入出力間で互いに干渉しあうことが問題とされている。干渉のある MIMO 系に対しては, 前置補償器を用いて非干渉化した後, 1 入力 1 出力 (single-input single-output : SISO) の制御器を用いて制御するのが一般的である [6]。しかし, この方法では前置補償器が離散化による不安定零点の影響を考慮していないことから, 近似逆系を用いることとなり完全追従制御を達成できない [3]。そのため, 完全追従制御を達成するためには MIMO のマルチレートフィードフォワード制御器 [7] を設計する必要がある。MIMO 系におけるマルチレートフィードフォワード制御においては一般化可制御性指数から  $B$  行列を構成する選び方によって制御系の設計方法が一意では

なく, 複数種類の制御器設計が考えられる [8]。

マルチレートフィードフォワード制御では目標状態変数軌道に対して完全追従制御を達成するための制御入力を得ることができる [2]。したがって, 目標出力軌道に対する目標状態変数軌道を生成する必要がある。従来の SISO 系におけるマルチレートフィードフォワード制御では, 制御対象を可制御正準形で表現することで, 微分関係にある状態変数に対して出力方程式を時間領域において畳み込むことによって目標出力軌道に対する目標状態変数軌道を生成していた [9]。また, 制御対象のノミナルプラントが連続時間に不安定零点を持つ場合は直接計算した逆系が不安定になることから, 安定逆系を用いた方法 [10] や時間軸反転を用いた Preactuation Perfect Tracking Control (PPTC) [11] などが検討されてきた。一方, MIMO 系におけるマルチレートフィードフォワード制御では, 出力方程式の  $C$  行列における非対角項の存在や, SISO 系の場合のように可制御正準形を用いて全ての状態変数を微分関係に表すことができない場合があるという問題があった。

本稿では, 特異値分解を用いた生成手法により MIMO 系におけるマルチレートフィードフォワード制御の目標出力軌道に対する目標状態変数軌道を生成する手法を提案する。またその過程において, プラントが連続時間に不安定零点を持つ場合や計算誤差が生じた場合などによって畳み込み計算において不安定性が生じることに言及し, それに対して時間軸反転を用いた生成方法 [11] を適用することを提案する。本稿では, 6 自由度の精密位置決めステージを制御対象とし, 6 自由度のうち  $x$  軸に沿った並進と  $y$  軸周りの回転の 2 自由度における干渉のある 2 入力 2 出力系を考える。提案法である MIMO 系における特異値分解と時間軸反転を用いた状態変数軌道生成方法とマルチレートフィードフォー

ド制御器設計方法の理論を示した上で、シミュレーションを通じて提案法の有効性を確認する。

## 2. SISO系における目標出力軌道に対する目標状態変数軌道生成

従来法の SISO 系における目標出力軌道から目標状態変数軌道を生成する方法について説明する。ただし、制御対象のノミナルプラントは連続時間で不安定零点を持たないものとする。

周波数領域におけるプラントの伝達関数が式 (1) のように表されるとする。

$$P(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \dots\dots\dots (1)$$

このプラントは可制御正準形を用いて状態方程式 (2) と出力方程式 (3) のように表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \dots\dots\dots (2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

状態方程式 (2) から、各状態変数が微分関係になっていることがわかる。出力方程式 (3) を時間領域で畳み込むことで、式 (4) のように目標出力軌道  $y_d(t)$  から目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_d(t) = [x_{1d}(t) \ x_{2d}(t) \ \dots \ x_{nd}(t)]^T$  を生成する。ただし、 $\mathcal{L}^{-1}$  はラプラス逆変換を表す。

$$x_{1d}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{b_m s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} y_d(s) \right] \dots\dots\dots (4)$$

## 3. MIMO系における目標出力軌道に対する目標状態変数軌道生成

提案法の MIMO 系における目標出力軌道から目標状態変数軌道を生成する方法について説明する。ただし、 $m < n$ ,  $\text{rank}(\mathbf{B}) = m$  とし、制御対象のノミナルプラントは連続時間で不安定零点を持たないものとする。

〈3・1〉 制御対象の定義  $m$  入力  $m$  出力  $n$  次のプラントの状態方程式と出力方程式は、状態変数  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , 入力  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , 出力  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  として、 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を用いて式 (5), (6) のように表される。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \dots\dots\dots (5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \dots\dots\dots (6)$$

〈3・2〉  $\mathbf{B}$  行列の特異値分解 ここで  $\mathbf{B}$  行列の特異値分解を考えると、 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  として式 (7) のように表される。

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $\mathbf{\Sigma}$  の要素は  $m < n$  より  $\sigma_i (i = 1 \dots m \in \mathbb{N})$  を  $\mathbf{B}$  行列の特異値として次のように表される。

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Delta} = \text{diag}(\sigma_i) (i = 1 \dots m \in \mathbb{N})$$

式 (7) の両辺に左から  $\mathbf{U}^{-1}$  をかけて

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}\mathbf{V}^* \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

〈3・3〉 状態方程式に対するラプラス変換を用いた変形 状態方程式 (5) をラプラス変換すると

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \dots\dots\dots (9)$$

式 (9) について、式 (7) における  $\mathbf{U}^{-1}$  を変換行列として  $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}(s)$  となる  $\mathbf{x}(s)$  から  $\tilde{\mathbf{x}}(s)$  への状態変数変換を行うと式 (10) のように変形できる。

$$s(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}(s)) = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}(s)) + (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{u}(s) \\ \Leftrightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})\tilde{\mathbf{x}}(s) = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{u}(s) \\ \Leftrightarrow \mathbf{W}(s)\tilde{\mathbf{x}}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}\mathbf{V}^* \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{u}(s) \dots\dots\dots (10)$$

$\mathbf{W}(s) = s\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  としたとき、 $\mathbf{W}(s)$  は  $\mathbf{W}_u(s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{W}_l(s) \in \mathbb{C}^{(n-m) \times n}$  を用いて式 (11) のように表される。

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_u(s) \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

式 (10), (11) より

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_u(s) \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}\mathbf{V}^* \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{u}(s) \dots\dots\dots (12)$$

式 (12) の下側  $(n-m)$  行分を取り出すと式 (13) のようになる。

$$\mathbf{W}_l(s)\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{O} \dots\dots\dots (13)$$

〈3・4〉 出力方程式に対するラプラス変換を用いた変形 出力方程式 (6) をラプラス変換すると

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) についても同様に、 $\mathbf{U}^{-1}$  を変換行列として  $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}(s)$  となる  $\mathbf{x}(s)$  から  $\tilde{\mathbf{x}}(s)$  への状態変数変換を行うと式 (15) のように変形できる。

$$\mathbf{y}(s) = (\mathbf{C}\mathbf{U})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}(s)) \\ \Leftrightarrow (\mathbf{C}\mathbf{U})\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{y}(s) \dots\dots\dots (15)$$

〈3・5〉 目標状態変数軌道の生成 式 (13), (15) を垂直方

向に連結すると式 (16) のようになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{CU} \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(s) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

式 (16) より MIMO 系における目標出力軌道  $\mathbf{y}(s)$  から状態変数  $\tilde{\mathbf{x}}(s)$  の目標状態変数軌道へは式 (17) のように変換される。

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{CU} \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(s) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) において  $\mathbf{U}$  を変換行列として  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}}(s)$  となる  $\tilde{\mathbf{x}}(s)$  から  $\mathbf{x}(s)$  への状態変数変換を行うことで, MIMO 系における目標出力軌道  $\mathbf{y}_d(s)$  から目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_d(s)$  を式 (18) のように求めることができる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}}(s)) &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{CU} \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(s) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}(s) &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{CU} \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(s) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式 (18) を逆ラプラス変換することで, MIMO 系における目標出力軌道  $\mathbf{y}_d(t)$  から目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_d(t)$  を式 (19) のように求めることができる。

$$\mathbf{x}_d(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{CU} \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_d(s) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \right] \dots\dots\dots (19)$$

#### 4. 逆系が不安定なプラントに対する時間軸反転による状態変数軌道生成

プラントが連続時間不安定零点を持つ場合や計算誤差が生じた場合などによって, 式 (19) における目標状態変数軌道が発散してしまう場合がある。本稿では, 時間軸反転による状態変数軌道生成 [11] によりこの問題を解決し, 完全追従制御を達成するための安定な目標状態変数軌道を生成する。ただし, 目標出力軌道の微分値が  $n-1$  回微分まで与えられているものとする。

〈4・1〉 安定部と不安定部の分割 式 (19) の右辺のフィルタを式 (20) のように定義する。

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{CU} \\ \mathbf{W}_l(s) \end{bmatrix}^{-1} = F_{ij}(s) \quad (i, j \in \{1, 2, \dots, n\}) \dots\dots\dots (20)$$

$F_{ij}(s)$  を安定極を持つ  $F_{ij}^s(s)$ , 不安定極を持つ  $F_{ij}^{us}(s)$  に分解する。

$$F_{ij}(s) = F_{ij}^s(s) + F_{ij}^{us}(s) \dots\dots\dots (21)$$

また,  $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$  を片側ラプラス変換として  $f_{ij}^s(t)$ ,  $f_{ij}^{us}(t)$  を式 (22), (23) のように定義する。ここで,  $F_{ij}^{us}(-s)$  は安定であることに注意する。

$$f_{ij}^s(t) = \tilde{\mathcal{L}}^{-1} [F_{ij}^s(s)] \dots\dots\dots (22)$$

$$f_{ij}^{us}(t) = \tilde{\mathcal{L}}^{-1} [F_{ij}^{us}(-s)] \dots\dots\dots (23)$$

〈4・2〉 安定部の状態変数軌道生成 安定部の状態変数軌道  $\mathbf{x}_d^s(t)$  については式 (24) を用いて生成する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d^s(t) &= [x_{1d}^s(t) \quad x_{2d}^s(t) \quad \dots \quad x_{nd}^s(t)]^T \\ &= \int_{-\infty}^t f_{ij}^s(t-\tau) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_d(\tau) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} d\tau \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

〈4・3〉 時間軸反転による不安定部の状態変数軌道生成 不安定部の状態変数軌道  $\mathbf{x}_d^{us}(t)$  は, 時間軸を反転した目標出力軌道  $\mathbf{y}_d(-\bar{t})$  と安定である  $\tilde{f}_{ij}^{us}(\bar{t}-\bar{\tau})$  を畳み込み計算し, さらにそれを時間軸反転することにより, 式 (25) のように生成できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d^{us}(t) &= [x_{1d}^{us}(t) \quad x_{2d}^{us}(t) \quad \dots \quad x_{nd}^{us}(t)]^T \\ &= \int_{-\infty}^{\bar{t}} \tilde{f}_{ij}^{us}(\bar{t}-\bar{\tau}) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_d(-\bar{\tau}) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} d\bar{\tau} \Big|_{\bar{t}=t} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

〈4・4〉 状態変数軌道の導出 安定部分と不安定部分の状態変数軌道を足し合わせることで目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_d(t)$  を求める。

$$\mathbf{x}_d(t) = \mathbf{x}_d^s(t) + \mathbf{x}_d^{us}(t) \dots\dots\dots (26)$$

#### 5. MIMO 系におけるマルチレートフィードフォワード制御を用いた完全追従制御法

〈5・1〉 制御対象の定義  $m$  入力  $p$  出力の  $n$  次の MIMO 系において, 連続時間の状態方程式 (27) と出力方程式 (28) が与えられたとする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \dots\dots\dots (27)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) \dots\dots\dots (28)$$

$$\mathbf{B}_c = [\mathbf{b}_{c1} \quad \dots \quad \mathbf{b}_{cm}] \dots\dots\dots (29)$$

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{c}_{c1} \quad \dots \quad \mathbf{c}_{cp}]^T \dots\dots\dots (30)$$

ただし, 状態変数  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ , 入力  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ , 出力  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  とする。

〈5・2〉 一般化可制御性指数による  $\mathbf{B}$  行列の構成 式 (31) のように一般化可制御性指数を定義する [7]。

**Definition (Generalized Controllability Indices : 一般化可制御性指数).**  $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_c = [\mathbf{b}_{c1}, \dots, \mathbf{b}_{cm}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  について,  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$  の一般化可制御性指数は式 (31) のように定義される,  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$  が可制御な場合, 式 (31) の一般化可制御性指数の中から  $n$  個の線形独立なベクトルを選ぶことができる。

$$\{\mathbf{b}_{c1}, \dots, \mathbf{b}_{cm}, \mathbf{A}_c \mathbf{b}_{c1}, \dots, \mathbf{A}_c \mathbf{b}_{cm}, \dots, \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{b}_{cm}\} \dots\dots\dots (31)$$

このとき,  $\varphi$  をこれら  $n$  個のベクトルの組とし,  $\sigma_l$ ,  $N$  を次のように定める。

$$\sigma_l = \text{number}\{k | \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{b}_{cl} \in \varphi\} \dots\dots\dots (32)$$

$$\sum_{l=1}^m \sigma_l = n \dots\dots\dots (33)$$

$$N = \max(\sigma_r) \dots \dots \dots (34)$$

MIMO 系の場合、状態方程式をマルチレート化する際に一般化可制御性指数の中から  $n$  ( $=$  plant order) 個のベクトルを選び、行がフルランクとなる  $\mathbf{B}$  行列を構成する。したがって、その選び方により設計されるフィードフォワード制御器が異なる形となる [7]。

〈5・3〉 目標状態変数軌道に追従する制御入力の生成 マルチレート化した状態方程式 (35) から式 (36) のように完全追従制御を達成するための制御入力  $\mathbf{u}_{ff}[i]$  を得ることができる。

$$\mathbf{x}[i+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[i] + \mathbf{B}\mathbf{u}[i] \dots \dots \dots (35)$$

$$\mathbf{u}_{ff}[i] = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{z}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}[i+1] \dots \dots \dots (36)$$

式 (35), (36) において  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}[i]$ ,  $\mathbf{u}[i]$ ,  $\mathbf{z}$  は次のように定義される。ただし、 $T_r$  は目標軌道  $r(t)$  のサンプリング周期、 $T_y$  は出力  $y(t)$  のサンプリング周期、 $T_u$  は制御入力  $u(t)$  のホールド周期を表す。また、 $T_r$  と  $T_y$  のうち長い周期をフレーム周期  $T_f$  とする。

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c T_f} \dots \dots \dots (37)$$

$$\mathbf{x}[i] = \mathbf{x}(iT_f) \dots \dots \dots (38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}[i] &= [\mathbf{u}_1[i] \quad \dots \quad \mathbf{u}_m[i]]^T \\ &= [u_{11}[i] \quad \dots \quad u_{1\sigma_1}[i] \quad u_{21}[i] \quad \dots \quad u_{m\sigma_m}[i]]^T \\ &\dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

$$\mathbf{z} = e^{sT_f} \dots \dots \dots (40)$$

$$T_f = NT_u \dots \dots \dots (41)$$

制御系のブロック図を Fig. 1 に示す。 $L$  は離散時間リフティングオペレータ [12] であり、 $L^{-1}$  は周期  $T_r$  ごとに入力される  $n$  次元ベクトル  $\mathbf{u}_{ff}[i]$  を  $T_u = T_r/n$  ごとに第 1 要素から第  $n$  要素まで順に出力する。 $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z}_s$  はそれぞれ  $e^{sT_r}$ ,  $e^{sT_u}$  を意味する。また、 $\mathbf{C}_{fb}$  はモデル化誤差を打ち消すフィードバック制御器としてはたらく。

## 6. シミュレーション

〈6・1〉 制御対象のモデリング Fig. 2(a) に示す 6 自由度精密位置決めステージの微動ステージを制御対象とする。この微動ステージは 6 自由度エアベアリング重力キャンセラにより 6 自由度に摩擦なしに支持されている。本稿では、6 自由度のうち Fig. 2(b) のように  $x$  軸に沿った並進  $x_m$  と  $y$  軸周りの回転  $\theta_y$  の 2 自由度を制御することを考える。この 2 入力 2 出力で軸間に干渉をもつプラントのブロック図は Fig. 2(c) のように表される。

ステージの並進と回転の運動方程式はそれぞれ式 (42), (43) のようになる [14]。

$$(M_{x1} + M_{x2})\ddot{x}_{g1} + C_{x1}\dot{x}_{g1} + K_{x1}x_{g1} + M_{x2}L_{g2}\ddot{\theta}_y = f_x \dots \dots (42)$$

$$(M_{x2}L_{g2}^2 + J_{\theta y})\ddot{\theta}_y + C_{\theta y}\dot{\theta}_y + K_{\theta y}\theta_y + M_{x2}L_{g2}(\ddot{x}_{g1} - g\theta_y) = \tau_y + f_x L_{fx} (43)$$

制御対象の各パラメータを Table 1 に示す。

Table 1. Model parameters [13].

Symbol	Meaning	Value
$x_m$	Measured position of the fine stage	-
$x_{g1}$	Position of the CoG of the planar air bearing and the air gyro	-
$x_{g2}$	Position of the CoG of the fine stage	-
$\theta_y$	Measured attitude angle of the fine stage	-
$f_x$	Input force of the fine stage in the $x$ direction	-
$\tau_y$	Input torque of the fine stage in the $\theta_y$ direction	-
$M_{x1}$	Mass of the planar air bearing and the air gyro	0.077 kg
$C_{x1}$	Viscosity coefficient in the $x_{g1}$ motion	430 N/(m/s)
$K_{x1}$	Spring coefficient in the $x_{g1}$ motion	11000 N/m
$M_{x2}$	Mass of the fine stage	5.3 kg
$J_{\theta y}$	Moment of inertia of the fine stage	0.10 kgm <sup>2</sup>
$C_{\theta y}$	Viscosity coefficient of the fine stage in the $\theta_y$ motion	1.6 Nm/(rad/s)
$K_{\theta y}$	Spring coefficient of the fine stage in the $\theta_y$ motion	1200 Nm/rad
$L_m$	Distance between the measurement point of $x_m$ and the CoR	-0.0050 m
$L_{g2}$	Distance between the CoR and the CoG of the fine stage	-0.051 m
$L_{fx}$	Distance between the CoR of the fine stage and the actuation point	-0.50 m

式 (44) により、 $x_{g1}$  を観測可能な  $x_m$  に変換する。

$$x_m(s) = x_{g1}(s) + L_m\theta_y(s) \dots \dots \dots (44)$$

式 (42), (43), (44) から、各係数の値を  $a_{ij}$ ,  $b_{ik}$  ( $i \in \{2, 4\}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $k \in \{1, 2\}$ ) として、式 (45), (46) のように  $(\dot{x}_m, \dot{\theta}_y)$  を  $(x_m, \dot{x}_m, \theta_y, \dot{\theta}_y)$  で表す。

$$\dot{x}_m = a_{21}x_m + a_{22}\dot{x}_m + a_{23}\theta_y + a_{24}\dot{\theta}_y + b_{21}f_x + b_{22}\tau_y \dots \dots (45)$$

$$\dot{\theta}_y = a_{41}x_m + a_{42}\dot{x}_m + a_{43}\theta_y + a_{44}\dot{\theta}_y + b_{41}f_x + b_{42}\tau_y \dots \dots (46)$$

式 (45), (46) より、連続時間の状態方程式 (47) と出力方程式 (48) を得る。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \dots \dots \dots (47)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c\mathbf{x}(t) \dots \dots \dots (48)$$

ただし、 $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  は次の通り。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_m \\ \dot{x}_m \\ \theta_y \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix}, \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} f_x \\ \tau_y \end{bmatrix}, \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x_m \\ \theta_y \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_{c1} \quad \mathbf{b}_{c2}], \\ \mathbf{C}_c &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

連続時間の状態方程式 (47) と出力方程式 (48) をサンプリング周期  $T_u$  で零次ホールドすることにより、離散時間の状態方程式 (49) と出力方程式 (50) を得る。

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_s\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_s\mathbf{u}[k] \dots \dots \dots (49)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_s\mathbf{x}[k] \dots \dots \dots (50)$$

ただし、 $\mathbf{x}[k]$ ,  $\mathbf{u}[k]$ ,  $\mathbf{y}[k]$ ,  $\mathbf{B}_s$  は次の通り。

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_m[k] \\ \dot{x}_m[k] \\ \theta_y[k] \\ \dot{\theta}_y[k] \end{bmatrix}, \mathbf{u}[k] = \begin{bmatrix} f_x[k] \\ \tau_y[k] \end{bmatrix}, \mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} x_m[k] \\ \theta_y[k] \end{bmatrix}, \mathbf{B}_s = [\mathbf{b}_{s1} \quad \mathbf{b}_{s2}]$$

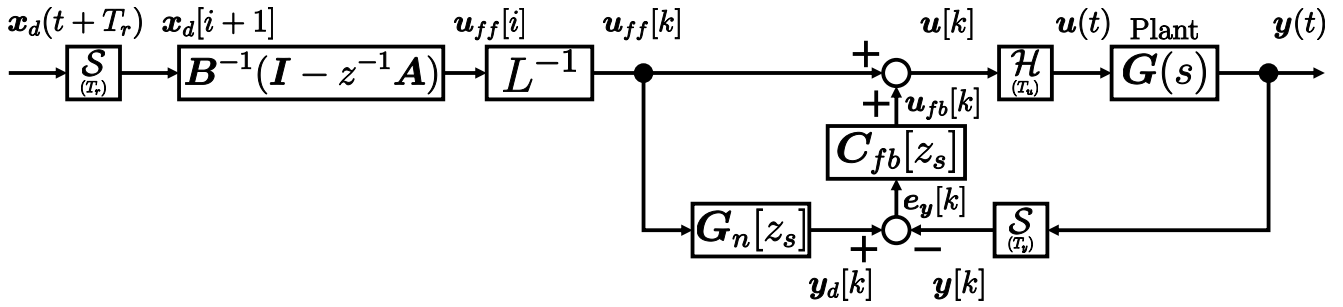
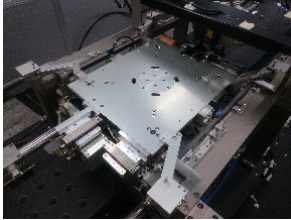
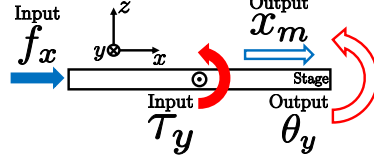


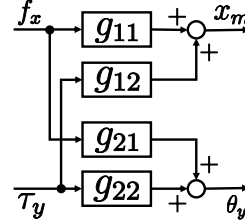
Fig. 1. Block diagram of the controller with the plant which does not have unstable intrinsic zeros.  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{H}$ , and  $\mathcal{L}$  denote a sampler, holder, and lifting operator [12], respectively,  $z$  and  $z_s$  denote  $e^{sT_r}$  and  $e^{sT_u}$ , respectively.



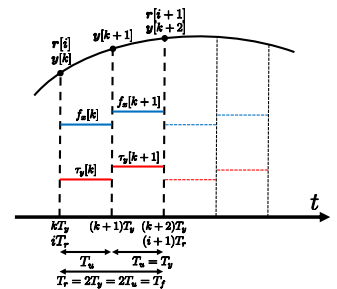
(a) Photograph of the 6-DOF high-precision stage.



(b) Coupling problem between  $x_m$  and  $\theta_y$ .



(c) Block diagram of the plant.



(d) MIMO multirate sampling control at same interval.  $(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 2)$

Fig. 2. Details of the simulation.

〈6・2〉 特異値分解を用いた状態変数軌道生成 本稿では、マルチレートフィードフォワード制御器設計における計算の数値的安定性を考えて、状態方程式 (49) と出力方程式 (50) を平衡実現したものを状態変数軌道生成と制御器設計に用いる。

平衡実現されたプラントに対して式 (19) から目標出力軌道に対する目標状態変数軌道を生成する。その際に、式 (20) のフィルタ  $F_{ij}(s)$  ( $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) が不安定になる場合は、安定部分と不安定部分に分割した上で、安定部分に対しては式 (24) を用いた生成方法、不安定部分に対しては式 (25) の時間軸反転を用いた生成方法により安定な目標状態変数軌道をそれぞれ生成し、最後に足し合わせるものとする。

〈6・3〉 MIMO 系におけるマルチレートフィードフォワード制御器設計  $\mathbf{B}$  行列を構成するにあたり、一般化可制御性指数を考えると式 (51) のようになる。

$$(\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s) = \{b_{s1}, b_{s2}, A_s b_{s1}, A_s b_{s2}, A_s^2 b_{s1}, A_s^2 b_{s2}, A_s^3 b_{s1}, A_s^3 b_{s2}\} \cdots (51)$$

本稿では、 $\mathbf{B}$  行列の構成方法として、1 フレーム周期  $T_f$  あたりに各入力を等しい回数入力する最も基本的な構成方法である

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 2) :$$

$$\mathbf{B} = [A_s b_{s1} \quad b_{s1} \quad A_s b_{s2} \quad b_{s2}] \cdots (52)$$

を  $\mathbf{B}$  行列として用いる。この場合の、マルチレート入力 の概念図を Fig. 2(d) に示す。

〈6・4〉 シミュレーション条件  $x$  軸に沿った並進の指令値  $x_m^{\text{ref}}$  を 0 から 20 ms で 0 から 100  $\mu\text{m}$  に遷移する 7 次の多項式軌道とし、 $y$  軸周りの回転の指令値  $\theta_y^{\text{ref}}$  を 0 から 20 ms で 0 から 100  $\mu\text{rad}$  に遷移する 7 次の多項式軌道とする。  $T_u = 200 \mu\text{s}$ ,  $N = \max(\sigma_1, \sigma_2) = 2$  として  $T_r = 2T_y = 2T_u = T_f$  とする。また、本稿のシミュレーションではフィードバック制御器は用いず Fig. 1 における  $C_{fb}$  は 0 とする。

〈6・5〉 シミュレーション結果 シミュレーション結果を Fig. 3 に示す。また、追従誤差の拡大図を Fig. 4 に示す。 Fig. 4 から、フレーム周期  $T_f$  ごとに追従誤差が 0 となり、完全追従制御が達成されていることが確認できる。また、 $-600 \mu\text{s}$  から 0 s の各入力の拡大図を Fig. 5 に示す。 Fig. 5 から負時間に Preactuation が行われ、それによって逆系が不安定なプラントに対しても完全追従が達成されたことが確認できる。以上の考察から、提案法の有効性が確認された。

## 7. 結論

本稿では、MIMO 系における特異値分解を用いた目標出力軌道に対する目標状態変数軌道の生成方法、および、マルチレートフィードフォワード制御器の設計方法を提案した。これにより、従来は目標状態変数軌道の生成方法が確立されていなかった MIMO 系に対してもより一般にマルチレートフィードフォワード制御を適用することができる。またその過程において、プラントが連続時間に不安定零点を持

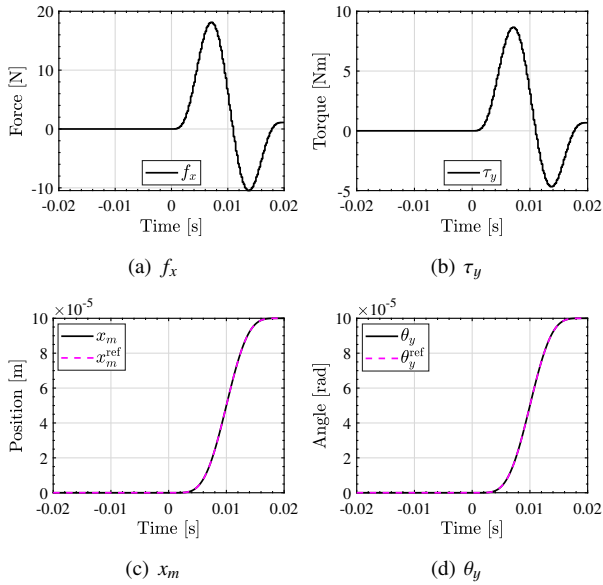


Fig. 3. Simulation results of the proposed method  
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 2)$ .

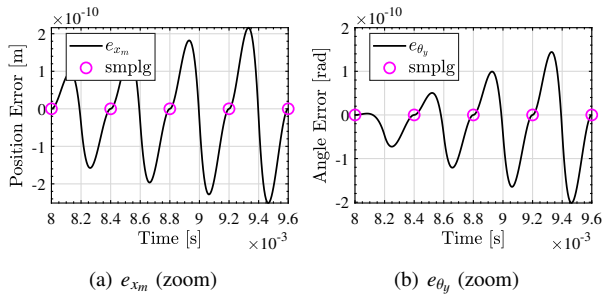


Fig. 4. Zooms of the tracking errors in the simulation results of the proposed method  $(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 2)$ .

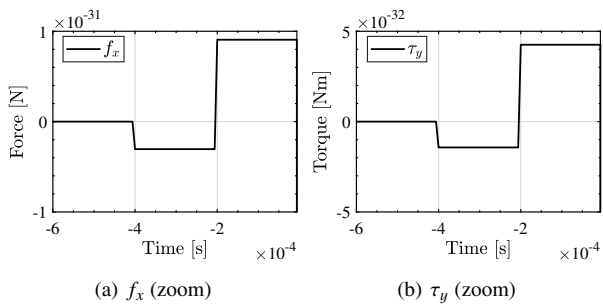


Fig. 5. Zooms of the inputs in the simulation results of the proposed method  $(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 2)$ .

つ場合や計算誤差が生じた場合などによって畳み込み計算において不安定性が生じることに言及し、それに対して時間軸反転を用いた生成方法を適用することを提案した。提案法の有効性は、6自由度の精密位置決めステージの  $x$  軸に沿った並進  $x_m$  と  $y$  軸周りの回転  $\theta_y$  の干渉を考慮した 2 入力 2 出力系におけるシミュレーションで検証された。プ

ラントが不安定零点を持つ様々な場合について提案法の有効性を確認することが今後の研究課題である。

#### 参考文献

- (1) 藤本博志, 堀洋一, 山口高司, 中川真介: マルチレートサンプリングを用いた完全追従制御法による磁気ディスク装置のシーク制御, 電気学会論文誌. D, 産業応用部門誌, Vol. 120, No. 10, pp. 1157–1164 (2000).
- (2) Fujimoto, H., Hori, Y. and Kawamura, A.: Perfect tracking control based on multirate feedforward control with generalized sampling periods, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 48, No. 3, pp. 636–644 (2001).
- (3) Tomizuka, M.: Zero Phase Error Tracking Algorithm for Digital Control, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 109, No. 1, p. 65 (1987).
- (4) Moore, G. E.: Cramming More Components Onto Integrated Circuits, *Electronics*, Vol. 38, No. 8 (1965).
- (5) Ohnishi, W., Fujimoto, H., Sakata, K., Suzuki, K. and Saiki, K.: Design and control of 6-DOF high-precision scan stage with gravity canceller, in *American Control Conference*, pp. 997–1002 (2014).
- (6) Butler, H.: Position Control in Lithographic Equipment, *IEEE Control Systems*, Vol. 31, No. 5, pp. 28–47 (2011).
- (7) Fujimoto, H.: *General Framework of Multirate Sampling Control and Applications to Motion Control Systems*, PhD thesis (2000).
- (8) Mae, M., Ohnishi, W., Fujimoto, H. and Hori, Y.: Perfect Tracking Control of Dual-Input Dual-Output System for High-Precision Stage in Translation and Pitching Motion, *Proceedings of the International Workshop on Sensing, Actuation, Motion Control, and Optimization*, No. 5, pp. TT6–5 (2018).
- (9) 藤本博志, 堀洋一, 河村篤男: マルチレートフィードフォワード制御を用いた完全追従制御法, 計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 9, pp. 766–772 (2000).
- (10) Zundert, van J., Bolder, J., Koekebakker, S. and Oomen, T.: Resource-efficient ILC for LTI/LTV systems through LQ tracking and stable inversion: Enabling large feedforward tasks on a position-dependent printer, *Mechatronics*, Vol. 38, pp. 76–90 (2016).
- (11) Ohnishi, W., Beauduin, T. and Fujimoto, H.: Preactuated multirate feedforward for a high-precision stage with continuous time unstable zeros, *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 50, No. 1, pp. 10907–10912 (2017).
- (12) Chen, T. and Francis, B. A.: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer London, London (1995).
- (13) Ohnishi, W., Fujimoto, H., Sakata, K., Suzuki, K. and Saiki, K.: Decoupling Control Method for High-Precision Stages using Multiple Actuators considering the Misalignment among the Actuation Point, Center of Gravity, and Center of Rotation, *IEEJ Journal of Industry Applications*, Vol. 5, No. 2, pp. 141–147 (2016).
- (14) Ohnishi, W., Fujimoto, H., Sakata, K., Suzuki, K. and Saiki, K.: Integrated design of mechanism and control for high-precision stages by the interaction index in the Direct Nyquist Array method, in *American Control Conference*, pp. 2825–2830 (2015).