

# 高次共振系に対する積と和の分解を用いた マルチレートフィードフォワード制御の比較検討

前 匡鴻\*, 大西 亘, 藤本 博志 (東京大学)

## Comparison of Multirate Feedforward Control with Multiplicative and Additive Decomposition for High-Order Resonant System

Masahiro Mae\*, Wataru Ohnishi, Hiroshi Fujimoto (The University of Tokyo)

The interval of perfect tracking control becomes longer when the model is high-order. In the model reduction, several types of decomposition can be made with multiplicative and additive decomposition. In this study, the types of decomposition and the tracking performance are compared in multirate feedforward control with multiplicative and additive decomposition.

**キーワード**：マルチレートフィードフォワード制御，モード正準形，モード分解，サンプル点間応答，完全追従制御，高次共振系

(multirate feedforward control, modal form, mode decomposition, intersample behavior, perfect tracking control, high-order resonant system)

### 1. 序論

制御対象のモデルの逆系に基づくフィードフォワード制御は、半導体や液晶パネルの製造に用いられる露光装置の精密位置決めステージ [1] やハードディスクドライブ [2] など様々な制御対象の精密位置決め制御に広く用いられている。制御対象のモデルが不安定零点を持つ場合、その逆系として設計されるフィードフォワード制御器は不安定極を持ち、フィードフォワード制御器から生成される制御入力が振動、発散するという問題がある。制御対象のモデルが連続時間系の零点である真性不安定零点を持たない場合であっても、相対次数が2次以上である多くの機械系や電気系の制御対象のモデルは、離散化によって発生する離散化不安定零点を持つことが知られている [3]。離散化不安定零点は $z$ 平面の $z = -1$ の周りに発生するため、その逆系として設計されるフィードフォワード制御器から生成される制御入力が振動、発散する。

不安定零点を持つモデルに対する安定逆系を設計するために、Zero Phase Error Tracking Control (ZPETC) [4]、Zero Magnitude Error Tracking Control (ZMETC) [5]、Nonminimum-Phase Zeros Ignore (NPZ-Ignore) [6] など、様々な近似逆系の設計手法が提案されている。しかし、これらの近似逆系を用いた制御手法では、理論上、完全追従制御 [4] を達成することはできない。

離散化不安定零点の問題を解決し、完全追従制御を達成する制御手法として、マルチレートフィードフォワード制御 [7] が提案されている。制御対象のより詳細な高次のモデルを用いることは、その逆系に基づくフィードフォワード制御の性能を向上させる。一方で、マルチレートフィードフォワード制御は、 $n$  次の制御対象に対して、 $n$  サンプルごとに  $n$  個の目標状態変数軌道への完全追従制御を達成す

る。したがって、完全追従制御を達成する状態変数の数と完全追従制御を達成するサンプル点の間隔にトレードオフが存在する。

この問題を解決するために、シングルレートフィードフォワード制御とマルチレートフィードフォワード制御を組み合わせた手法 [8] も提案されている。この手法では、制御対象のモデルを積の形に分解することで、選択したモードの状態変数の個数のサンプル点ごとに、目標出力軌道に対して完全追従制御を達成する。これにより、完全追従制御を達成するサンプル点の間隔の問題を解決し、従来の可制御正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御よりも連続時間追従誤差を低減することが確認されている。

一方で、同じ問題を解決するために、モード正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御 [9] が提案されている。この手法では、制御対象のモデルを和の形に分解することで、選択したモードの状態変数の個数のサンプル点ごとに、選択したモードの目標状態変数軌道に対して完全追従制御を達成する。これにより、完全追従制御を達成するサンプル点の間隔の問題を解決し、従来の可制御正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御よりも連続時間追従誤差を低減することが確認されている。

このように、完全追従制御を達成する状態変数の数と完全追従制御を達成するサンプル点の間隔のトレードオフという同様の問題に対して、積の分解を用いた逆系の設計手法と、和の分解を用いた逆系の設計手法という2種類のフィードフォワード制御器設計手法が提案されている。本稿では、8 次の制御対象に対するシミュレーションを行い、これら2種類の制御手法が持つ特性について比較検討を行う。

### 2. 問題設定

問題設定のブロック線図を図1に示す。目標出力軌道

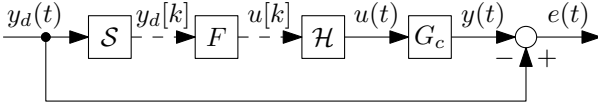


図1 軌道追従制御のブロック線図。連続時間システム  $G_c$  は離散時間制御器  $F$ 、サンプリング器  $S$ 、ホールド  $\mathcal{H}$  により制御される。連続時間追従誤差  $e(t)$  を最小化することを目的とする。

Fig. 1. Block diagram of tracking control. The continuous-time system  $G_c$  is controlled by the discrete-time controller  $F$  with sampler  $S$  and holder  $\mathcal{H}$ . The objective is to minimize the continuous-time error  $e(t)$ .

$y_d(t) \in \mathbb{R}$ , 制御入力  $u(t) \in \mathbb{R}$ , 出力  $y(t) \in \mathbb{R}$ , 離散時間制御器  $F$ , サンプリング器  $S$ , 零次ホールド  $\mathcal{H}$  とする。 $n$  次の連続時間線形時不変システム  $G_c$  を式 (1) のように定義する。

$$G_c(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

ただし,  $n > m$ ,  $b_0 \neq 0$  とし,  $G_c$  は安定な最小位相系で真性不安定零点を持たないものとする。 $y_d(t)$  は事前に与えられているものとし, 連続時間追従誤差  $e(t)$  を減少させることを目的とする。

### 3. 可制御正準形に基づく状態変数軌道生成

マルチレートフィードフォワード制御は, 目標状態変数軌道  $x_d$  に対して指令値のサンプリング周期ごとに完全追従制御 [4] を達成する。可制御正準形に基づき, 目標出力軌道  $y_d$  から目標状態変数軌道  $x_d$  を生成する。

式 (1) の制御対象  $G_c$  の可制御正準形の状態方程式と出力方程式はそれぞれ式 (2) と式 (3) のように表される。

$$\dot{\mathbf{x}}_{ccf}(t) = \mathbf{A}_{c,ccf} \mathbf{x}_{ccf}(t) + \mathbf{b}_{c,ccf} u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_{c,ccf} \mathbf{x}_{ccf}(t) \quad (3)$$

ただし,  $\mathbf{x}_{ccf}$ ,  $\mathbf{A}_{c,ccf}$ ,  $\mathbf{b}_{c,ccf}$ ,  $\mathbf{c}_{c,ccf}$  は次の通り。

$$\mathbf{x}_{ccf}(t) = [x_{0,ccf}(t) \quad x_{1,ccf}(t) \quad \dots \quad x_{n-1,ccf}(t)]^T \quad (4)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{c,ccf} & \mathbf{b}_{c,ccf} \\ \hline \mathbf{c}_{c,ccf} & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & b_0 \\ 1 & \frac{b_1}{b_0} & \frac{b_2}{b_0} & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5)$$

目標出力軌道  $y_d$  は  $n-1$  回微分可能とし,  $\mathbf{y}_d$  を式 (6) のように定義する。

$$\mathbf{y}_d(t) = \left[ 1 \quad \frac{d}{dt} \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \right]^T y_d(t) \quad (6)$$

目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_{d,ccf}$  は式 (7) より生成される。

$$\mathbf{x}_{d,ccf}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{B(s)} \mathbf{y}_d(s) \right] \quad (7)$$

ただし,  $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$  逆片側ラプラス変換を表す [10]。

### 4. 2 次のモードに基づくモード分解とモード正準形への状態変数変換

制御対象  $G_c$  は, 式 (8) のように 2 次のモードの和の形に分解される。

$$G_c(s) = \sum_{l=1}^{n_{mod}} \frac{b_{1,l}s + b_{0,l}}{s^2 + a_{1,l}s + a_{0,l}} \quad (8)$$

ただし,  $n_{mod}$  はモードの総数,  $l$  はモードの番号をそれぞれ示す。本研究において,  $G_c$  は機械系を仮定し, 2 次の剛体モードと複数の 2 次の共振モードで構成され, 制御対象の次数  $n$  は偶数,  $n_{mod} = n/2$  とする。

式 (8) の各モードを可制御正準形で表すと, 状態方程式と出力方程式はそれぞれ式 (9) と式 (10) のように表される。

$$\dot{\mathbf{x}}_{mod}(t) = \mathbf{A}_{c,mod} \mathbf{x}_{mod}(t) + \mathbf{b}_{c,mod} u(t) \quad (9)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_{c,mod} \mathbf{x}_{mod}(t) \quad (10)$$

ただし,  $\mathbf{x}_{mod}$ ,  $\mathbf{A}_{c,mod}$ ,  $\mathbf{b}_{c,mod}$ ,  $\mathbf{c}_{c,mod}$  は次の通り。

$$\mathbf{x}_{mod}(t) = [x_{mod,1}(t) \quad x_{mod,2}(t) \quad \dots \quad x_{mod,n_{mod}}(t)]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{x}_{mod,l}(t) = [x_{0,mod,l}(t) \quad x_{1,mod,l}(t)]^T \quad (l = 1, \dots, n_{mod}) \quad (12)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{c,mod} & \mathbf{b}_{c,mod} \\ \hline \mathbf{c}_{c,mod} & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{A}_{c,mod,1} & & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{c,mod,1} \\ & \mathbf{A}_{c,mod,2} & & \mathbf{b}_{c,mod,2} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_{c,mod,n_{mod}} & \mathbf{b}_{c,mod,n_{mod}} \\ \hline \mathbf{c}_{c,mod,1} & \mathbf{c}_{c,mod,2} & \dots & \mathbf{c}_{c,mod,n_{mod}} & 0 \end{array} \right] \quad (13)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{c,mod,l} & \mathbf{b}_{c,mod,l} \\ \hline \mathbf{c}_{c,mod,l} & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -a_{0,l} & -a_{1,l} & b_{0,l} \\ \hline 1 & \frac{b_{1,l}}{b_{0,l}} & 0 \end{array} \right] \quad (14)$$

可制御正準形からモード正準形への状態変数変換行列  $T$  は式 (15) のように求められる。

$$T = [\mathbf{b}_{c,mod} \quad \mathbf{A}_{c,mod} \mathbf{b}_{c,mod} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{c,mod}^{(n_{mod}-1)} \mathbf{b}_{c,mod}] \begin{bmatrix} \frac{a_1}{b_0} & \dots & \frac{a_{n-1}}{b_0} & \frac{1}{b_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{b_0} & \frac{1}{b_0} & \dots & \vdots \\ \frac{1}{b_0} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

モード正準形における目標状態変数軌道は式 (16) のように求められる。

$$\mathbf{x}_{d,mod}(t) = T \mathbf{x}_{d,ccf}(t) \quad (16)$$

### 5. 積の分解を用いた逆系の設計: Single-rate Multirate Inversion [8]

**〈5・1〉 積の分解** 積の分解を用いた逆系の設計におけるブロック線図を図 2 に示す。制御対象のモデルの次数を  $n$ , マルチレート系の次数を  $n_{mr}$ , シングルレート系の次数を  $n_{sr}$  とし,  $n = n_{mr} + n_{sr}$  とする。

零次ホールドにより離散化したモード正準形の制御対象のモデル  $G_{s,mod} \triangleq (\mathbf{A}_{s,mod}, \mathbf{b}_{s,mod}, \mathbf{c}_{s,mod}, d_{s,mod})$  を考える。

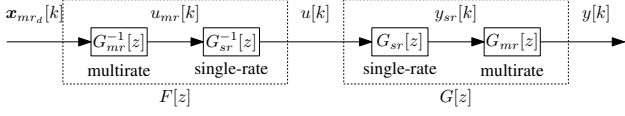


図2 シングルレートマルチレート逆系のブロック線図  
Fig. 2. Block diagram with single-rate multirate inversion.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{s,mod} &= e^{\mathbf{A}_{c,mod} T_u}, \quad \mathbf{b}_{s,mod} = \int_0^{T_u} e^{\mathbf{A}_{c,mod} \tau} \mathbf{b}_{c,mod} d\tau \\ \mathbf{c}_{s,mod} &= \mathbf{c}_{c,mod}, \quad \mathbf{d}_{s,mod} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (17)$$

このように、 $\mathbf{d}_{c,mod}$  が可逆でない場合は、逆双一次変換  $\mathcal{B}^{-1}(\cdot)$  を用いることで、可逆な  $\mathbf{D}$  を持つ等価な連続時間モデル

$$\mathcal{B}^{-1}(G_{s,mod}) = G \stackrel{s}{=} (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \quad (18)$$

を用いて考える。G おいて積の形

$$G = \mathcal{B}^{-1}(G_{mr} G_{sr}) = \mathcal{B}^{-1}(G_{mr}) \mathcal{B}^{-1}(G_{sr}) \quad (19)$$

に分解する。最後に、双一次変換  $\mathcal{B}(\cdot)$  により元の離散時間モデル

$$G_{s,mod} = G_{mr} G_{sr} \quad (20)$$

に戻す処理を行う。

$\tilde{G}_{mr} = \mathcal{B}^{-1}(G_{mr})$  と  $\tilde{G}_{sr} = \mathcal{B}^{-1}(G_{sr})$  をそれぞれ、

$$\tilde{G}_{mr} \stackrel{s}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_{mr} & \tilde{\mathbf{b}}_{mr} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{mr} & \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (21)$$

$$\tilde{G}_{sr} \stackrel{s}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_{sr} & \tilde{\mathbf{b}}_{sr} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{sr} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (22)$$

とする。

$\mathbf{A}$  と  $\mathbf{A}_x = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$  の不変部分空間の列空間をそれぞれ  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n_{mr}}$  と  $\mathbf{V}_x \in \mathbb{R}^{n \times n_{sr}}$  とし、フルランクとなる  $\mathbf{S} = [\mathbf{V} \quad \mathbf{V}_x]$  を考える。ここで、 $\mathbf{A}$  の固有値はシステムの極、 $\mathbf{A}_x = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$  の固有値はシステムの零点に対応する [11] ことから、 $\mathbf{V}$  に対応する極が  $\tilde{G}_{mr}$  の極、 $G$  の残りの極が  $\tilde{G}_{sr}$  の極、 $\mathbf{V}_x$  に対応する零点が  $\tilde{G}_{sr}$  の零点、 $G$  の残りの零点が  $\tilde{G}_{mr}$  の零点となることに注意されたい。変換行列  $\mathbf{\Pi}$  を

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{mr}} & \mathbf{O}_{n_{mr} \times n_{sr}} \\ \mathbf{O}_{n_{sr} \times n_{mr}} & \mathbf{O}_{n_{sr} \times n_{sr}} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \quad (23)$$

として、 $\tilde{G}_{mrf}$  と  $\tilde{G}_{srf}$  を次のように求める。

$$\tilde{G}_{mrf} \stackrel{s}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{\Pi}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (24)$$

$$\tilde{G}_{srf} \stackrel{s}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (25)$$

一般に、制御対象  $G$  に対する変換行列  $\mathbf{T}$  を用いた状態変数変換を

$$\mathcal{T}(G, \mathbf{T}) = (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{D}) \quad (26)$$

と定義する。

$\tilde{G}_{mrf}$  と  $\tilde{G}_{srf}$  に対して、

$$\mathcal{T}(\tilde{G}_{mrf}, \mathbf{T}_{per}) \stackrel{s}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_{mr} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{sr} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{b}}_{mr} \\ \mathbf{O} \end{array} \right] \quad (27)$$

$$\mathcal{T}(\tilde{G}_{srf}, \mathbf{T}_{per}) \stackrel{s}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_{mr} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{sr} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{b}}_{srf} \\ \tilde{\mathbf{b}}_{sr} \end{array} \right] \quad (28)$$

を満たす変換行列  $\mathbf{T}_{per}$  を求める。

シルベスター方程式

$$\tilde{\mathbf{A}}_{mr}\mathbf{X} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{A}}_{sr} = \tilde{\mathbf{b}}_{mr}\tilde{\mathbf{c}}_{sr} \quad (29)$$

の解  $\mathbf{X}$  を用いて、

$$\mathcal{T}(\tilde{G}_{mr}\tilde{G}_{sr}, \mathbf{T}_{per}^{-1}\mathbf{T}_{ms}) = G \quad (30)$$

を満たす  $\mathbf{T}_{ms}$  を

$$\mathbf{T}_{ms} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{mr}} & \mathbf{X} \\ \mathbf{O}_{n_{mr} \times n_{sr}} & \mathbf{I}_{n_{sr}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

のように得る。

最後に、 $\tilde{G}_{mr} = \mathcal{B}^{-1}(G_{mr})$  と  $\tilde{G}_{sr} = \mathcal{B}^{-1}(G_{sr})$  をそれぞれ双一次変換することで、

$$\mathcal{B}(\tilde{G}_{mr}) = G_{mr} \stackrel{z}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{mr} & \mathbf{b}_{mr} \\ \mathbf{c}_{mr} & 0 \end{array} \right] \quad (32)$$

$$\mathcal{B}(\tilde{G}_{sr}) = G_{sr} \stackrel{z}{=} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{sr} & \mathbf{b}_{sr} \\ \mathbf{c}_{sr} & \mathbf{d}_{sr} \end{array} \right] \quad (33)$$

を得る。

可制御正準形の目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_d$  から、積の分解におけるマルチレートフィードフォワード制御で用いる目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_{mr_d}$  を次のように得る。

$$\mathbf{x}_{mr_d}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{mr}} & \mathbf{O}_{n_{mr} \times n_{sr}} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{ms}^{-1} \mathbf{T}_{per} \mathbf{T}_{mod} \mathbf{x}_d[k] \quad (34)$$

**<5・2> 積の分解を用いたフィードフォワード制御入力の設計** マルチレート系の逆系は、マルチレートフィードフォワード制御により次のように設計する。

$$G_{mr}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{mr}^{-1}\mathbf{A}_{mr} & \mathbf{B}_{mr}^{-1} \end{array} \right] \quad (35)$$

$$\underline{u}_{mr}[i] = G_{mr}^{-1} \underline{\mathbf{x}}_{mr_d}[i+1] \quad (36)$$

ただし、

$$\underline{\mathbf{x}}_{mr}[i] = \mathbf{x}_{mr}[kn_{mr}] \quad (37)$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{mr} = \mathbf{A}_{mr}^{n_{mr}} \quad (38)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{mr} = [\mathbf{A}_{mr}^{n_{mr}-1} \mathbf{b}_{mr} \quad \mathbf{A}_{mr}^{n_{mr}-2} \mathbf{b}_{mr} \quad \cdots \quad \mathbf{b}_{mr}] \quad (39)$$

$$\underline{u}_{mr}[i] = [u_{mr}[kn_{mr}] \quad \cdots \quad u_{mr}[(k+1)n_{mr}-1]]^T \quad (40)$$

とする。

シングルレート系の逆系は、シングルレートフィードフォワード制御により、次のように設計する。

$$G_{sr}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{sr} - \mathbf{b}_{sr}d_{sr}^{-1}\mathbf{c}_{sr} & \mathbf{b}_{sr}d_{sr}^{-1} \\ \hline -d_{sr}^{-1}\mathbf{c}_{sr} & d_{sr}^{-1} \end{array} \right] \dots\dots\dots (41)$$

$$u[k] = G_{sr}^{-1}u_{mr}[k] \dots\dots\dots (42)$$

この制御手法は、 $N = n_{mr}$  サンプルごとに目標出力軌道に対して完全追従制御を達成する。

## 6. 和の分解を用いた逆系の設計：Multirate Feed-forward Control based on Modal Form [9]

和の分解を用いた逆系の設計におけるブロック線図を図3に示す。

**<6・1> モード選択** 式(13)のモード正準形において、各モードは非干渉化されている。したがって、フィードフォワード制御入力を選択したモードに対してそれぞれ設計することができる。

モード選択行列  $\mathbf{M}_\mu$  は次のように定義される。ただし、 $l = 1, \dots, n_{mod}$  をモードの番号とする。

$$\mathbf{M}_\mu = \text{diag}\{\mathbf{M}_l\} \dots\dots\dots (43)$$

$$\mathbf{M}_l = \begin{cases} \mathbf{I}_2 & (\text{selected mode}) \\ \mathbf{O}_2 & (\text{not selected mode}) \end{cases} \dots\dots\dots (44)$$

ただし、 $\mu$  は選択したモードの集合とし

$$\mu = \{k|k \in l = 1, \dots, n_{mod}\} \dots\dots\dots (45)$$

とする。また、 $\mathbf{M}$  の行で全ての要素が0の行は除くものとする。 $\nu$  を選択したモードの個数として式(46)のように定義し、 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2\nu \times n}$  とする。

$$\nu = \text{number}\{\mu\} \dots\dots\dots (46)$$

選択したモードの状態方程式は式(47)のように表される。

$$\dot{\mathbf{x}}_\mu(t) = \mathbf{A}_{c,\mu}\mathbf{x}_\mu(t) + \mathbf{b}_{c,\mu}u(t) \dots\dots\dots (47)$$

ただし、 $\mathbf{x}_\mu$ ,  $\mathbf{A}_{c,\mu}$ ,  $\mathbf{b}_{c,\mu}$  は次の通り。

$$\mathbf{x}_\mu(t) = \mathbf{M}_\mu\mathbf{x}_{d,mod}(t), \mathbf{A}_{c,\mu} = \mathbf{M}_\mu\mathbf{A}_{c,mod}, \mathbf{b}_{c,\mu} = \mathbf{M}_\mu\mathbf{b}_{c,mod} \quad (48)$$

選択したモードの目標状態変数軌道は式(49)のように求められる。

$$\mathbf{x}_{d,\mu}(t) = \mathbf{M}_\mu\mathbf{x}_{d,mod}(t) \dots\dots\dots (49)$$

**<6・2> 選択したモードを用いたフィードフォワード制御入力の生成** 式(47)を制御入力のサンプリング周期  $T_u$  で離散化した離散時間の状態方程式は、式(50)のように表される。

$$\mathbf{x}_\mu[k+1] = \mathbf{A}_{s,\mu}\mathbf{x}_\mu[k] + \mathbf{b}_{s,\mu}u[k] \dots\dots\dots (50)$$

ただし、 $\mathbf{A}_{s,\mu}$ ,  $\mathbf{b}_{s,\mu}$  は次の通り。

$$\mathbf{A}_{s,\mu} = e^{\mathbf{A}_{c,\mu}T_u}, \quad \mathbf{b}_{s,\mu} = \int_0^{T_u} e^{\mathbf{A}_{c,\mu}\tau}\mathbf{b}_{c,\mu}d\tau \dots\dots\dots (51)$$

入力多重度  $2\nu$  でリフティングした状態方程式は、式(52)のように表される。

$$\mathbf{x}_\mu[i+1] = \mathbf{A}_\mu\mathbf{x}_\mu[i] + \mathbf{B}_\mu\mathbf{u}[i] \dots\dots\dots (52)$$

ただし、指令値のサンプリング周期を  $T_r = 2\nu T_u$  とし、 $\mathbf{x}_\mu$ ,  $\mathbf{A}_\mu$ ,  $\mathbf{B}_\mu$ ,  $\mathbf{u}[i]$  は次の通り。

$$\mathbf{x}_\mu[i] = \mathbf{x}_\mu(iT_r) \dots\dots\dots (53)$$

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}_{s,\mu}^{2\nu} \dots\dots\dots (54)$$

$$\mathbf{B}_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\mu}^{2\nu-1}\mathbf{b}_{s,\mu} & \mathbf{A}_{s,\mu}^{2\nu-2}\mathbf{b}_{s,\mu} & \dots & \mathbf{b}_{s,\mu} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (55)$$

$$\mathbf{u}[i] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{2\nu} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} u(kT_u) & u((k+1)T_u) & \dots & u((k+2\nu-1)T_u) \end{bmatrix} \dots\dots (56)$$

式(52)より、 $2\nu$  サンプルだけ先の目標状態変数軌道  $\mathbf{x}_{d,\mu}[i+1]$  に対して、フィードフォワード制御入力  $\mathbf{u}_{ff}[i]$  は式(57)のように生成される。

$$\mathbf{u}_{ff}[i] = \mathbf{B}_\mu^{-1}(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}_\mu)\mathbf{x}_{d,\mu}[i+1] \dots\dots\dots (57)$$

この制御手法は、 $N = 2\nu$  サンプルごとに選択したモードの目標状態変数軌道に対して完全追従制御を達成する。

## 7. シミュレーションによる連続時間追従誤差の比較検証

**<7・1> 制御対象の定義** 本稿では、図4(a)に示す1軸の精密位置決めステージを制御対象とする。リニアモータの駆動力を発生させる入力電流  $u$  [A] から、リニアエンコーダにより測定されるステージの変位  $y$  [m] を出力としたときの、連続時間の伝達関数モデルは次のように表される。

$$G_c(s) = \frac{4.5759 \times 10^6}{s(s+2.101)(s^2+10.89s+3.665 \times 10^4)} \\ \times \frac{(s^2+8.132s+2.518 \times 10^4)(s^2+84.73s+8.497 \times 10^5)}{(s^2+45.4s+3.139 \times 10^5)(s^2+262.2s+3.507 \times 10^6)} \dots\dots (58)$$

この伝達関数モデルは最小実現されており、安定で、真性不安定零点を持たない。 $G_c$  のボード線図を図4(b)に示す。

$G_c$  は、次のように4つの2次のモードにモード分解できる。

$$G_c(s) = G_{1c}(s) + G_{2c}(s) + G_{3c}(s) + G_{4c}(s) \\ = \frac{-0.00027976(s-8674)}{s(s+2.101)} + \frac{-0.00012742(s-9494)}{(s^2+10.89s+3.665 \times 10^4)} \\ + \frac{0.00032577(s-7779)}{(s^2+45.4s+3.139 \times 10^5)} + \frac{8.1406 \times 10^{-5}(s-1.312 \times 10^4)}{(s^2+262.2s+3.507 \times 10^6)} \dots (59)$$

**<7・2> シミュレーション条件** 指令値となる目標出力軌道  $y_d$  を、図5に示す0mから10 $\mu$ mまで0sから10msで遷移する15次の多項式軌道とする。制御入力のサンプリング周期を  $T_u = 400 \mu$ s とする。

和の分解を用いた逆系の設計において、1つ目のモード

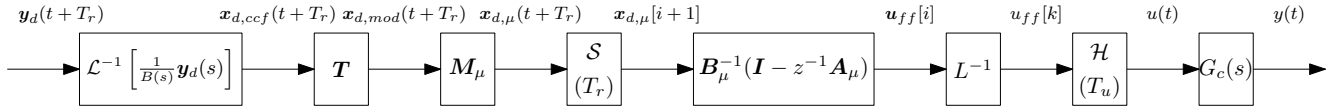
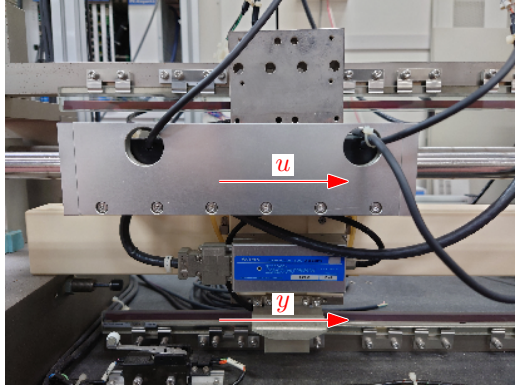
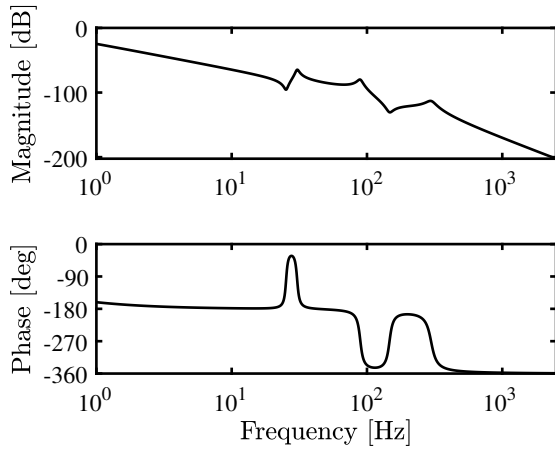


図3 状態変数軌道生成とモード正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御のボード線図。z, S, H, L は  $e^{sT_r}$ , サンプラ, ホールド, リフティングオペレータ [12] をそれぞれ表す。

Fig. 3. Block diagram of state trajectory generation and multirate feedforward control based on modal form. z, S, H, and L denote  $e^{sT_r}$ , sampler, holder, and lifting operator [12], respectively.



(a) High-precision positioning stage with input current  $u$  [A] generating force with linear motor and output displacement  $y$  [m] measured by linear encoder.



(b) Bode diagram of 8th-order motion system  $G_c(s)$ .

図4 シミュレーションで用いる超精密位置決めステージ  
Fig. 4. High-precision positioning stage used in simulations.

$G_{1c}(s)$  と 2 つ目のモード  $G_{2c}(s)$  を選択するように  $\mu = (1, 2)$  とする。

積の分解を用いた逆系の設計において, 連続時間の制御対象のモデル  $G_c(s)$  を零次ホールドにより離散化した離散時間の制御対象のモデル  $G_s[z]$  は次のように求まる。

$$G_s[z] = \frac{4.7188 \times 10^{-9}(z + 9.441)(z + 0.9812)(z + 0.1022)}{(z - 0.9992)(z - 1)(z^2 - 1.99z + 0.9957)} \times \frac{(z^2 - 1.993z + 0.9968)(z^2 - 1.835z + 0.9667)}{(z^2 - 1.932z + 0.982)(z^2 - 1.392z + 0.9004)} \dots (60)$$

離散時間の制御対象のモデル  $G_s[z]$  を, マルチレート逆系を設計する  $G_{mr}[z]$  が 1 次モードと 2 次モードの極を含み, シン

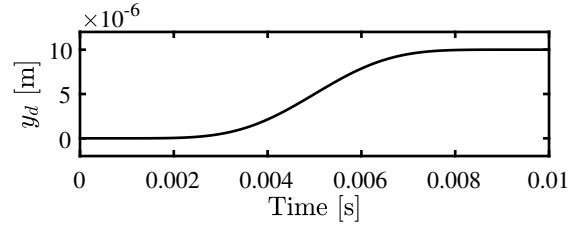


図5 15 次多項式からなる目標出力軌道  $y_d$

Fig. 5. Desired output trajectory  $y_d$  consists of 15th-order polynomials.

グルート逆系を設計する  $G_{sr}[z]$  が 3 次モードと 4 次モードの極と全ての真性零点を含むように,  $G_s[z] = G_{mr}[z]G_{sr}[z]$  となる積の形で分解すると, 次のように求まる。

$$G_{mr}[z] = \frac{111.67(z + 9.441)(z + 0.9812)(z + 0.1022)}{(z - 0.9992)(z - 1)(z^2 - 1.99z + 0.9957)} \dots (61)$$

$$G_{sr}[z] = \frac{4.2258 \times 10^{-11}(z^2 - 1.993z + 0.9968)(z^2 - 1.835z + 0.9667)}{(z^2 - 1.932z + 0.982)(z^2 - 1.392z + 0.9004)} \dots (62)$$

また, 比較対象として, 積と和の分解を用いない 8 次の制御対象に対する, 可制御正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御を用いたシミュレーションを行う。全てのシミュレーションはフィードバック制御器を用いず, 開ループ制御で行う。

### 〈7・3〉 シミュレーション結果

可制御正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御 (MRFFC), 積の分解に基づく逆系 (SRMRI), 和の分解に基づく逆系 (MODMR) の 3 つの手法に対してシミュレーション結果における比較を行う。シミュレーションにおける連続時間追従誤差の時間波形を図 7 に示す。また, シミュレーションにおける連続時間追従誤差の平均二乗平方根  $RMS(e)$  と絶対値の最大値  $MAX(|e|)$  の比較を表 1 に示す。

シミュレーションの結果より, 可制御正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御と比較して, 積の分解に基づく逆系において連続時間追従誤差の平均二乗平方根  $RMS(e)$  が減少している。これは, 指令値のサンプリング周期が  $8T_u$  から  $4T_u$  に小さくなったことにより改善されたと考えられる。

また, 可制御正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御と比較して, 和の分解に基づく逆系において連続時間追従誤差の絶対値の最大値  $MAX(|e|)$  が減少している。これは, 指令値のサンプリング周期ごとに目標出力軌道には完全追従しない一方で, 選択したモードの状態変数

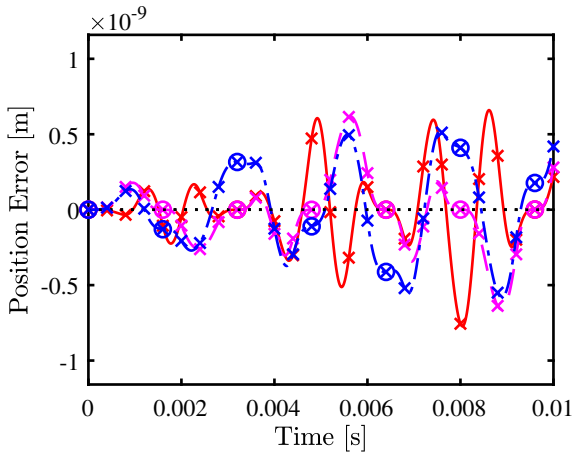


図6 シミュレーション結果における軌道追従誤差。マルチレートフィードフォワード制御 (—), 積の分解に基づく逆系 (- - -), 和の分解に基づく逆系 (- · - ·) の結果をそれぞれ示す。(×)に $T_u$ ごとのサンプリング点, (○)に $T_r$ ごとのサンプリング点をそれぞれ示す。

図7 Simulation results of error  $e$  using multirate feedforward control (—), single-rate multirate inversion (- - -), and multirate feedforward control with mode selection (- · - ·). (×) shows sampling point every  $T_u$ , and (○) shows sampling point every  $T_r$ .

表1 シミュレーションにおける連続時間追従誤差の平均二乗平方根  $RMS(e)$  と絶対値の最大値  $MAX(|e|)$

Table 1. Root mean square errors  $RMS(e)$  and maximum absolute errors  $MAX(|e|)$  of simulations.

$\mu$	$RMS(e)$ [m]	$MAX( e )$ [m]
MRFFC	$2.64 \times 10^{-10}$	$7.72 \times 10^{-10}$
SRMRI	$2.33 \times 10^{-10}$	$6.61 \times 10^{-10}$
MODMR	$2.89 \times 10^{-10}$	$5.81 \times 10^{-10}$

には完全追従しているためであると考えられる。目標出力軌道に対して完全追従制御を達成できない理由は、選択しなかったモードに対して零次ホールドによる離散化の影響を厳密には考慮できていないためであると考えられる。

以上の考察より、連続時間追従誤差の平均二乗平方根  $RMS(e)$  と絶対値の最大値  $MAX(|e|)$  の2つの観点において、積と和のモード分解を行うことで連続時間追従誤差改善できる余地があることが確認された。

## 8. 結論

本稿では、高次共振系に対するモード分解を用いた最適なマルチレート逆系の設計の検討として、積の分解を用いた逆系の設計と和の分解を用いた逆系の設計という2種類の制御手法について比較検討を行った。高次共振系に対する逆系の設計には、完全追従制御を達成させる状態変数の数と、指令値のサンプリング周期の間にトレードオフが存在する。積の分解を用いた逆系の設計では、マルチレート

逆系を設計した状態変数の個数のサンプル点ごとに、目標出力軌道に完全追従制御を達成する。一方で、和の分解を用いた逆系の設計では、マルチレート逆系を設計した状態変数の個数のサンプル点ごとに、選択したモードの目標状態変数軌道に完全追従制御を達成する。シミュレーションにより、和の分解を用いた逆系の設計と積の分解を用いた逆系の設計において、従来のマルチレートフィードフォワード制御よりも連続時間追従誤差を低減する可能性があることが確かめられた。

## 文 献

- (1) Oomen, T.: Advanced Motion Control for Precision Mechatronics: Control, Identification, and Learning of Complex Systems, *IEEJ Journal of Industry Applications*, Vol. 7, No. 2, pp. 127–140 (2018).
- (2) Nakagawa, S., Yamaguchi, T., Fujimoto, I., Hori, Y., Ito, Y. and Hata, Y.: Multi-rate two-degree-of-freedom control for fast and vibration-less seeking of hard disk drives, in *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, Vol. 4, pp. 2797–2802 vol.4, IEEE (2001).
- (3) Åström, K., Hagander, P. and Sternby, J.: Zeros of sampled systems, *Automatica*, Vol. 20, No. 1, pp. 31–38 (1984).
- (4) Tomizuka, M.: Zero Phase Error Tracking Algorithm for Digital Control, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 109, No. 1, p. 65 (1987).
- (5) Wen, J. and Potsaid, B.: An experimental study of a high performance motion control system, in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Vol. 6, pp. 5158–5163, IEEE (2004).
- (6) Butterworth, J., Pao, L. and Abramovitch, D.: Analysis and comparison of three discrete-time feedforward model-inverse control techniques for nonminimum-phase systems, *Mechatronics*, Vol. 22, No. 5, pp. 577–587 (2012).
- (7) Fujimoto, H., Hori, Y. and Kawamura, A.: Perfect tracking control based on multirate feedforward control with generalized sampling periods, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 48, No. 3, pp. 636–644 (2001).
- (8) Zundert, van J., Ohnishi, W., Fujimoto, H. and Oomen, T.: Improving Intersample Behavior in Discrete-Time System Inversion: With Application to LTI and LPTV Systems, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 25, No. 1, pp. 55–65 (2020).
- (9) Ohnishi, W. and Fujimoto, H.: Multirate Feedforward Control Based on Modal Form, in *2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, No. 2, pp. 1120–1125, IEEE (2018).
- (10) Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. and Nawab, S.: *Signals and Systems*, Prentice-Hall, Inc., 2nd edition (1997).
- (11) Bart, H., Gohberg, I., Kaashoek, M. and Ran, A.: Schur complements and state space realizations, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 399, No. 1-3, pp. 203–224 (2005).
- (12) Chen, T. and Francis, B. A.: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer London, London (1995).