

3.4 複数モード系に対するマルチレートフィードフォワード制御

3.4.1 はじめに

厳密なモデル逆系に基づくフィードフォワード制御は、制御対象のモデルに対する完全追従制御 [1] を可能とする。フィードフォワード制御器の性能は、半導体露光装置 [2], ワイヤボンダ [3], ボールねじ駆動ステージ [4] などの精密位置決め装置の追従誤差に直結する。産業応用において、制御対象は離散時間で制御されるが、追従誤差は連続時間で改善されるべきである。

連続時間モデルに存在する真性零点や離散化によって発生する離散化零点 [5] が非最小位相零点である場合、厳密逆系が不安定系となる問題がある。Single-rate Stable Inversion [6] では、非最小位相零点を持つモデルに対して、非因果的な有界のフィードフォワード入力を生成することにより各サンプル点に対して完全追従制御を達成する。しかし、フィードフォワード制御器が $z = -1$ 付近の極を持つことから、振動的な制御入力が生成され、サンプル点間誤差を悪化させてしまう恐れがある。

サンプル点間応答を改善するために、マルチレートフィードフォワード制御 [7,8] が提案されている。マルチレートフィードフォワード制御は n サンプルごとに n 個の状態変数に完全追従させることでサンプル点間の振動を防ぐことができる。マルチレートフィードフォワードには、完全追従させる状態変数の数と指令値のサンプリング周期にトレードオフが存在する。そのトレードオフを最適化するために、和の分解 [9,10] と積の分解 [11] によるモード正準形に基づくマルチレートフィードフォワード制御が提案されている。これら 2 つの手法は完全追従させる状態変数を選択することにより、トレードオフを最適化し、連続時間追従誤差を改善する。

このように、完全追従を達成するためのフィードフォワード制御器として複数の手法が提案されているが、連続時間追従誤差の観点からどの完全追従制御器を選ぶべきかという議論はなされていなかった。本節では、提案されている複数の完全追従制御器の周波数領域と時間領域の双方における評価を行い、連続時間追従誤差を改善するためのフィードフォワード制御器の設計指針 [12] に関して紹介する。技術的貢献は次の通りである。

(1) 複数モード系における連続時間追従誤差改善に着目し完全追従制御法を考察する。

(2) 周波数領域と時間領域の双方において連続時間追従誤差を検証する。

3.4.2 問題設定

サンプル値制御における連続時間追従誤差

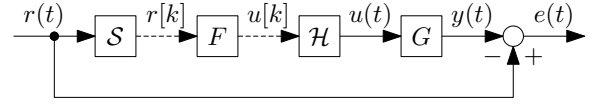


図 3.4.1 軌道追従制御のブロック線図。連続時間のシステム G は離散時間の制御器 F , サンプラ S , 零次ホールド \mathcal{H} により制御される。連続時間の誤差 $e(t)$ を最小化することを目標とする。

Fig. 3.4.1. Block diagram of tracking control. The continuous-time system G is controlled by the discrete-time controller F with sampler S and zero-order-hold \mathcal{H} . The objective is to minimize the continuous-time error $e(t)$.

問題設定のブロック線図を図 3.4.1 に示す。指令値 $r \in \mathbb{R}$, 入力 $u \in \mathbb{R}$, 出力 $y \in \mathbb{R}$, 誤差 $e \in \mathbb{R}$ とする。 n 次の連続時間線形時不変システム $G_c \triangleq (A_c, b_c, c_c, 0)$ は次のように与えられる。

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + b_c u(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = c_c x(t) \quad (3.2)$$

連続時間システム $H_c \triangleq (A_c, B_c, C_c, D_c)$ をサンプラ S と零次ホールド \mathcal{H} によりサンプリング時間 δ で離散化した離散時間システム $H_d \triangleq (A_d, B_d, C_d, D_d)$ は次のように定義される。

$$\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A_c \delta} & A_c^{-1}(e^{A_c \delta} - I)B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$x[k] = x(k\delta) \quad (3.4)$$

離散時間システム $G_d \triangleq (A_d, b_d, c_d, 0) = SG_c\mathcal{H}$ は次のように与えられる。

$$\dot{x}[k+1] = A_d x[k] + b_d u[k] \quad (3.5)$$

$$y[k] = c_d x[k] \quad (3.6)$$

事前に与えられた連続時間指令値 $r(t)$ に対して、サンプル点上とサンプル点間をどちらも含む連続時間誤差 $e(t)$ を最小化することを制御目標とする。

逆系によるシングルレートフィードフォワード制御

G_d を 1 サンプルシフトした、入力 $u[k]$ から出力 $y[k+1]$ までのシステム \tilde{G}_d は次のように与えられる。

$$\dot{x}[k+1] = A_d x[k] + b_d u[k] \quad (3.7)$$

$$y[k+1] = c_d A_d x[k] + c_d b_d u[k] \quad (3.8)$$

非特異の D を持つシステム $H = (A, B, C, D)$ の逆システム H^{-1} は一般に次のように定義される。

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

\tilde{G}_d の逆系より、シングルレートフィードフォワード制御器により生成される制御入力 u は次のように与えられる。

$$u[k] = \tilde{G}_d^{-1} r[k+1] \quad (3.10)$$

ただし、シングルレートフィードフォワード制御器 \tilde{G}_d^{-1} は次のように与えられる。

$$\tilde{G}_d^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d(\mathbf{c}_d\mathbf{b}_d)^{-1}\mathbf{c}_d\mathbf{A}_d & \mathbf{b}_d(\mathbf{c}_d\mathbf{b}_d)^{-1} \\ \hline -(\mathbf{c}_d\mathbf{b}_d)^{-1}\mathbf{c}_d\mathbf{A}_d & (\mathbf{c}_d\mathbf{b}_d)^{-1} \end{array} \right] \quad (3.11)$$

\tilde{G}_d^{-1} が不安定極を持つ場合は、次のような安定不安定分解を考える。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_s[k+1] \\ \mathbf{x}_u[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s[k] \\ \mathbf{x}_u[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s \\ \mathbf{b}_u \end{bmatrix} r[k+1] \quad (3.12)$$

$$u[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_s & \mathbf{c}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s[k] \\ \mathbf{x}_u[k] \end{bmatrix} + dr[k+1] \quad (3.13)$$

ただし、 $|\lambda(\mathbf{A}_s)| \leq 1$, $|\lambda(\mathbf{A}_u)| > 1$ とする。有界のフィードフォワード入力 u は次のように与えられる。

$$u[k] = \mathbf{c}_s\mathbf{x}_s[k] + \mathbf{c}_u\mathbf{x}_u[k] + dr[k+1] \quad (3.14)$$

ただし、 \mathbf{x}_s は

$$\mathbf{x}_s[k+1] = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s[k] + \mathbf{b}_s r[k+1], \mathbf{x}_s[-\infty] = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

を時間軸順方向に解くと得られ、 \mathbf{x}_u は

$$\mathbf{x}_u[k+1] = \mathbf{A}_u\mathbf{x}_u[k] + \mathbf{b}_u r[k+1], \mathbf{x}_u[\infty] = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

を時間軸逆方向に解くと得られる [6]。生成されたフィードフォワード入力 u により各サンプル点に対して完全追従制御が達成される。

シングルレート安定逆系により生成されたフィードフォワード入力は有界であるが、 $\lambda = -1$ 周辺の振動的な極に対しては対処できない。振動的なフィードフォワード入力はサンプル点間誤差を悪化させうる。

マルチレートフィードフォワード制御による状態追従

離散化によるフィードフォワード制御器の振動的な極に対処するために、マルチレートフィードフォワード制御 [7] に基づく完全追従制御が提案されている。

$\mathbf{H}_d \triangleq (\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{D}_d)$ を n サンプルリフティングしたシステム $\underline{\mathbf{H}}_d$ は一般に次のように定義される。

$$\underline{\mathbf{H}}_d \triangleq \mathcal{L}_n \mathbf{H}_d \mathcal{L}_n^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{A}}_d & \underline{\mathbf{B}}_d \\ \hline \underline{\mathbf{C}}_d & \underline{\mathbf{D}}_d \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^n & \mathbf{A}_d^{n-1}\mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^{n-2}\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{A}_d\mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{D}_d & \mathbf{O} & \cdots & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d & \mathbf{C}_d\mathbf{B}_d & \mathbf{D}_d & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^{n-2} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^{n-3}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^{n-4}\mathbf{B}_d & \ddots & \mathbf{D}_d & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^{n-1} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^{n-2}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^{n-3}\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{C}_d\mathbf{B}_d & \mathbf{D}_d \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\underline{u}[i_n] = \mathcal{L}_n u[k] = [u[ni_n] \cdots u[ni_n + (n-1)]]^\top \in \mathbb{R}^n \quad (3.18)$$

$$\underline{y}[i_n] = \mathcal{L}_n y[k] = [y[ni_n] \cdots y[ni_n + (n-1)]]^\top \in \mathbb{R}^n \quad (3.19)$$

ただし、 \mathcal{L}_n は n サンプルリフティングオペレータ [13] とする。

n サンプルリフティングされたシステム G_d は次のように与えられる。

$$\underline{G}_d \triangleq \mathcal{L}_n G_d \mathcal{L}_n^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{A}}_d & \underline{\mathbf{B}}_d \\ \hline \underline{\mathbf{C}}_d & \underline{\mathbf{D}}_d \end{array} \right] \quad (3.20)$$

\underline{G}_d の目標状態変数軌道は次のように定義される n サンプル毎のマルチレートサンブラ S_n から与えられる。

$$\hat{\mathbf{x}}[i_n] = S_n \hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(i_n n \delta) \quad (3.21)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ を連続時間の目標状態変数軌道とする。 \underline{G}_d の状態方程式の逆系から、マルチレートフィードフォワード制御器から生成される制御入力 u は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u[k] &= \mathcal{L}_n^{-1} (\underline{\mathbf{B}}_d^{-1} \hat{\mathbf{x}}[i_n + 1] - \underline{\mathbf{B}}_d^{-1} \underline{\mathbf{A}}_d \hat{\mathbf{x}}[i_n]) \\ &= \mathcal{L}_n^{-1} \underline{\mathbf{B}}_d^{-1} (\mathbf{I} - z^{-n} \underline{\mathbf{A}}_d) \hat{\mathbf{x}}[i_n + 1] \end{aligned} \quad (3.22)$$

ただし、 z はサンプリング時間 δ のシフトオペレータとする。生成されたフィードフォワード入力 u により、 n サンプル毎に n 個の状態変数に対して完全追従制御が達成され、サンプル点間誤差が改善される。

モデルが零点を持たない場合、目標状態変数軌道 $\hat{\mathbf{x}}$ は可制御正準形において、指令値とその微分より与えられる。モデルが零点を持つ場合、目標状態変数軌道生成法を用いる必要がある。マルチレートフィードフォワード制御器は n サンプル毎に n 個の状態変数に対して完全追従制御を達成するが、目標状態変数軌道のサンプリング周期は $n\delta$ となることから、モデルの次数 n が大きくなればなるほど、指令値のサンプリング周波数 $1/n\delta$ は低くなってしまふ。

要求事項

これらの考察から、最適な完全追従制御器は次の要求事項を満たす必要がある。

- (1) 離散化によって発生するフィードフォワード制御器の振動的な極が状態追従制御により対処されている。
- (2) 指令値のサンプリング周期を十分高くするために、完全追従制御させる状態変数が選択されている。マルチレートフィードフォワード制御により、状態追従させることができ、モード分解によりその状態変数を選択することができる。和の分解 [9, 10] と積の分解 [11] の 2 種類のマルチレートフィードフォワード制御器について、連続時間追従誤差の観点で従来の完全追従制御法との比較を行う。

3.4.3 目標状態変数軌道生成

1 入力 1 出力 n 次の連続時間線形時不変システムが次のように与えられるとする。

$$G_c(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (3.23)$$

ただし、 $n > m$, $b_0 \neq 0$ とする。 G_c の可制御正準形 $G_{c,ccf} \triangleq (\mathbf{A}_{c,ccf}, \mathbf{b}_{c,ccf}, \mathbf{c}_{c,ccf}, 0)$ は次のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}}_{ccf}(t) = \mathbf{A}_{c,ccf} \mathbf{x}_{ccf}(t) + \mathbf{b}_{c,ccf} u(t) \quad (3.24)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_{c,ccf} \mathbf{x}_{ccf}(t) \quad (3.25)$$

ただし、

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{c,ccf} & \mathbf{b}_{c,ccf} \\ \mathbf{c}_{c,ccf} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \\ b_0 & \cdots & b_m & 0 \end{array} \right] \quad (3.26)$$

とする。

状態変数軌道生成のためのフィルタは次のように与えられる。

$$\beta(t) = \mathcal{L}^{-1} [B(s)^{-1}] \quad (3.27)$$

ただし、 $\mathcal{L}[\cdot]$ は片側ラプラス変換を示す。可制御正準形における目標状態変数軌道は次のように与えられる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{ccf}(t) = \int_0^t \beta(t-\tau) \bar{\mathbf{r}}_n(\tau) d\tau \quad (3.28)$$

ただし、

$$\hat{\mathbf{x}}_{ccf}(t) = [\hat{x}_{ccf}(t) \cdots \hat{x}_{ccf,n-1}(t)]^T \quad (3.29)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T r(t) \quad (3.30)$$

とする。

もし、 $B(s)^{-1}$ が不安定極を持つ場合は、次のように安定不安定分解することを考える。

$$B(s)^{-1} = B_s^{-1}(s) + B_u^{-1}(s) \quad (3.31)$$

ただし、 $B_s^{-1}(s)$ の全ての極 $p_s \in \mathbb{C}$ は $\text{Re}(p_s) \leq 0$ であり、 $B_u^{-1}(s)$ の全ての極 $p_u \in \mathbb{C}$ は $\text{Re}(p_u) > 0$ とする。安定部と不安定部の状態変数軌道生成フィルタは次のように与えられる。

$$\beta_s(t) = \mathcal{L}^{-1} [B_s^{-1}(s)] \quad (3.32)$$

$$\beta_u(t) = \mathcal{L}^{-1} [B_u^{-1}(-s)] \quad (3.33)$$

安定部と不安定部の状態変数軌道は次のように与えられる。

$$\hat{\mathbf{x}}_s(t) = \int_{-\infty}^t \beta_s(t-\tau) \bar{\mathbf{r}}_n(\tau) d\tau \quad (3.34)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_u(t) = \int_t^{\infty} \beta_u(t-\tau) \bar{\mathbf{r}}_n(\tau) d\tau \quad (3.35)$$

以上より、可制御正準形における有界な目標状態変数軌道 $\hat{\mathbf{x}}_{ccf}$ は次のように与えられる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{ccf}(t) = \hat{\mathbf{x}}_s(t) + \hat{\mathbf{x}}_u(t) \quad (3.36)$$

3.4.4 モード分解によるマルチレートフィードフォワード制御

複数モード系の定義

連続時間の複数モード系を次のように定義する。

$$G_c(s) = \sum_{k_m=1}^{n_m} \frac{k_{k_m}}{s^2 + 2\zeta_{k_m}\omega_{k_m}s + \omega_{k_m}^2} = \sum_{k_m=1}^{n_m} G_{c,mod,k_m}(s) \quad (3.37)$$

ただし、 ω を共振角周波数、 ζ をダンピング係数、 κ をモードゲイン、 n_m をモードの数とする [14]。 G_c のモード正準形 $G_{c,mod} \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{A}_{c,mod}, \mathbf{b}_{c,mod}, \mathbf{c}_{c,mod}, 0)$ は次のように与えら

れる。

$$\dot{\mathbf{x}}_{mod}(t) = \mathbf{A}_{c,mod}\mathbf{x}_{mod}(t) + \mathbf{b}_{c,mod}u(t) \quad (3.38)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_{c,mod}\mathbf{x}_{mod}(t) \quad (3.39)$$

ただし、

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{c,mod} & \mathbf{b}_{c,mod} \\ \mathbf{c}_{c,mod} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{c,mod,1} & \cdots & 0 & b_{c,mod,1} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & A_{c,mod,n_m} & b_{c,mod,n_m} \\ \hline c_{c,mod,1} & \cdots & c_{c,mod,n_m} & 0 \end{array} \right] \quad (3.40)$$

$$\mathbf{x}_{mod}(t) = [\mathbf{x}_{mod,1}(t) \cdots \mathbf{x}_{mod,n_m}(t)]^T \quad (3.41)$$

とし、サブシステム $G_{c,mod,k_m} \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{A}_{c,mod,k_m}, \mathbf{b}_{c,mod,k_m}, \mathbf{c}_{c,mod,k_m}, 0)$ は次のように与えられる。

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{c,mod,k_m} & \mathbf{b}_{c,mod,k_m} \\ \mathbf{c}_{c,mod,k_m} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_{k_m}^2 & -2\zeta_{k_m}\omega_{k_m} & 1 & 1 \\ \hline \kappa_{k_m} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.42)$$

$$\mathbf{x}_{mod,k_m}(t) = [\mathbf{x}_{mod,k_m,0}(t) \ \mathbf{x}_{mod,k_m,1}(t)]^T \quad (3.43)$$

システム $\mathbf{H} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ に対する状態変数変換行列 \mathbf{T} による状態変数変換を一般に次のように定義する。

$$\mathcal{T}(\mathbf{H}, \mathbf{T}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{TAT}^{-1} & \mathbf{TB} \\ \hline \mathbf{CT}^{-1} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (3.44)$$

可制御正準形からモード正準形への状態変数変換行列 \mathbf{T}_{mod} は次のように与えられる。

$$\mathbf{T}_{mod} = [\mathbf{b}_{c,mod} \cdots \mathbf{A}_{c,mod}^{-1}\mathbf{b}_{c,mod}] \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

ただし、

$$\mathbf{G}_{c,mod} = \mathcal{T}(G_{c,ccf}, \mathbf{T}_{mod}) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{x}_{mod}(t) = \mathbf{T}_{mod}\mathbf{x}_{ccf}(t) \quad (3.47)$$

とする。

和の分解によるマルチレートフィードフォワード制御

和の分解によるマルチレートフィードフォワード制御の全体像を図 3.4.2 に示す。 μ は選択したモードに対応し、次のように定義される。

$$\mu = \{k_m | k_m \in 1, \dots, n_m\} \quad (3.48)$$

選択したモードの次数 ν は次のように定義される。

$$\nu = 2 \times \text{number}\{\mu\} \quad (3.49)$$

選択したモードに対応する置換行列は次のように定義される。

$$\mathbf{T}_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\mu \\ \mathbf{E}_\times \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

ただし、 \mathbf{E}_μ と \mathbf{E}_\times は選択したモードと選択しなかったモードの正規基底ベクトルにより構成され、モード k_m に対する正規基底ベクトルは次のように定義される。

$$\mathbf{E}_{k_m} = [\mathbf{O}_{2 \times 2(k_m-1)} \ \mathbf{I}_2 \ \mathbf{O}_{2 \times 2(n_m-k_m)}] \quad (3.51)$$

上側 ν 個の状態変数を取り出すモデル低次元化行列を次のように定義する。

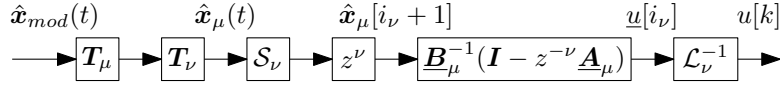


図 3.4.2 和の分解によるマルチレートフィードフォワード制御のブロック線図。

Fig. 3.4.2. Block diagram of multirate feedforward control with additive decomposition.

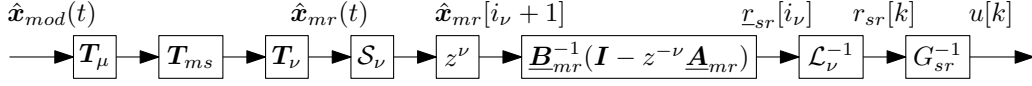


図 3.4.3 積の分解によるマルチレートフィードフォワード制御のブロック線図。

Fig. 3.4.3. Block diagram of multirate feedforward control with multiplicative decomposition.

$$\mathbf{T}_\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\nu & \mathbf{O}_{\nu \times (n-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

選択したモードのシステム $G_{c,\mu}$ は次のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}}_\mu(t) = \mathbf{A}_{c,\mu} \mathbf{x}_\mu(t) + \mathbf{b}_{c,\mu} u(t) \quad (3.53)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_{c,\mu} \mathbf{x}_\mu(t) \quad (3.54)$$

ただし,

$$\mathbf{x}_\mu(t) = \mathbf{T}_\nu \mathbf{T}_\mu \mathbf{x}_{mod}(t) \quad (3.55)$$

$$\mathbf{A}_{c,\mu} = \mathbf{T}_\nu \mathbf{T}_\mu \mathbf{A}_{c,mod} \mathbf{T}_\mu^{-1} \mathbf{T}_\nu^T \quad (3.56)$$

$$\mathbf{b}_{c,\mu} = \mathbf{T}_\nu \mathbf{T}_\mu \mathbf{b}_{c,mod} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{c}_{c,\mu} = \mathbf{c}_{c,mod} \mathbf{T}_\mu^{-1} \mathbf{T}_\nu^T \quad (3.58)$$

とする。 $G_{c,\mu}$ の離散時間システムは次のように与えられる。

$$G_{d,\mu} \triangleq SG_{c,\mu} \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d,\mu} & \mathbf{b}_{d,\mu} \\ \mathbf{c}_{d,\mu} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$G_{d,\mu}$ を ν サンプルリフティングしたシステムは次のように与えられる。

$$\underline{G}_{d,\mu} \stackrel{z^\nu}{=} \mathcal{L}_\nu G_{d,\mu} \mathcal{L}_\nu^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{d,\mu} & \underline{\mathbf{B}}_{d,\mu} \\ \underline{\mathbf{C}}_{d,\mu} & \underline{\mathbf{D}}_{d,\mu} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$\underline{G}_{d,\mu}$ の状態方程式の逆系から、和の分解によるマルチレートフィードフォワード制御器から生成される制御入力 u は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u[k] &= \mathcal{L}_\nu^{-1} (\underline{\mathbf{B}}_{d,\mu}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_\mu[i_\nu + 1] - \underline{\mathbf{B}}_{d,\mu}^{-1} \underline{\mathbf{A}}_{d,\mu} \hat{\mathbf{x}}_\mu[i_\nu]) \\ &= \mathcal{L}_\nu^{-1} \underline{\mathbf{B}}_{d,\mu}^{-1} (\mathbf{I} - z^{-\nu} \underline{\mathbf{A}}_{d,\mu}) \hat{\mathbf{x}}_\mu[i_\nu + 1] \end{aligned} \quad (3.61)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{x}}_\mu[i_\nu] = \mathbf{S}_\nu \mathbf{T}_\nu \mathbf{T}_\mu \hat{\mathbf{x}}_{mod}(t)$ とする。生成されたフィードフォワード入力 u により、 ν サンプル毎に選択したモード μ に対応する状態変数に対して完全追従制御が達成される。

選択した状態変数に対する完全追従は出力に対する完全追従を保証していないが、目標状態変数軌道はモデルの全状態変数に対して生成されており、選択された ν ($\leq n$) 個の状態変数に対する指令値のサンプリング周波数は $1/n\delta$ から $1/\nu\delta$ に高くなることから、連続時間追従誤差を改善することができる。

積の分解によるマルチレートフィードフォワード制御

積の分解によるマルチレートフィードフォワード制御の全体像を図 3.4.3 に示す。モード正準形の離散時間システム $G_{d,mod} \triangleq (\mathbf{A}_{d,mod}, \mathbf{b}_{d,mod}, \mathbf{c}_{d,mod}, 0) = \mathbf{S} G_{c,mod} \mathcal{H}$ を 1 サンプルシフトさせた、入力 $u[k]$ から出力 $y[k+1]$ までのシステム $\tilde{G}_{d,mod} \triangleq (\tilde{\mathbf{A}}_{d,mod}, \tilde{\mathbf{b}}_{d,mod}, \tilde{\mathbf{c}}_{d,mod}, \tilde{\mathbf{d}}_{d,mod})$ は次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{d,mod} & \tilde{\mathbf{b}}_{d,mod} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{d,mod} & \tilde{\mathbf{d}}_{d,mod} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d,mod} & \mathbf{b}_{d,mod} \\ \mathbf{c}_{d,mod} \mathbf{A}_{d,mod} & \mathbf{c}_{d,mod} \mathbf{b}_{d,mod} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times \nu}$ と $\mathbf{V}_\times \in \mathbb{R}^{n \times (n-\nu)}$ をそれぞれ G_{mr} の極と G_{sr} の零点に対応する不変部分空間 $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}_{d,mod}$ と $\mathbf{A}_\times = \tilde{\mathbf{A}}_{d,mod} - \tilde{\mathbf{b}}_{d,mod} \tilde{\mathbf{d}}_{d,mod}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{d,mod}$ の行空間とし、フルランクの $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V}_\times \end{bmatrix}$ より、選択したモード μ に対応する状態変数 ν に対して、 $\mathbf{\Pi}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\nu & \mathbf{O}_{\nu \times (n-\nu)} \\ \mathbf{O}_{(n-\nu) \times \nu} & \mathbf{O}_{(n-\nu)} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \quad (3.63)$$

そして、次のような状態空間実現を得る。

$$G_{mrf} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{d,mod} & \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{b}}_{d,mod} \tilde{\mathbf{d}}_{d,mod}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{d,mod} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$G_{srf} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{d,mod} & \tilde{\mathbf{b}}_{d,mod} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{d,mod} (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) & \tilde{\mathbf{d}}_{d,mod} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

置換行列 \mathbf{T}_μ を用いて、

$$\mathcal{T}(G_{mrf}, \mathbf{T}_\mu) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mr} & \mathbf{O} & \mathbf{b}_{mr} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{sr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{mr} & \mathbf{c}_{mrr} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathcal{T}(G_{srf}, \mathbf{T}_\mu) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mr} & \mathbf{O} & \mathbf{b}_{srr} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{sr} & \mathbf{b}_{sr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_{sr} & \mathbf{d}_{sr} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

のように状態変数変換を行い、状態変数 \mathbf{x}_{mr} に対するシステム G_{mr} と状態変数 \mathbf{x}_{sr} に対応するシステム G_{sr} は次のように与えられる。

$$G_{mr} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mr} & \mathbf{b}_{mr} \\ \mathbf{c}_{mr} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$G_{sr} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{sr} & \mathbf{b}_{sr} \\ \mathbf{c}_{sr} & \mathbf{d}_{sr} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$H_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ と $H_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ のシステムの積は一般に次のように定義される。

$$H_1 H_2 = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ \mathbf{O} & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right] \quad (3.70)$$

状態変数変換行列 T_{ms} は次のように与えられる。

$$T_{ms} = \left[\begin{array}{cc} I_v & X \\ \mathbf{O}_{v \times (n-v)} & I_{(n-v)} \end{array} \right]^{-1} \quad (3.71)$$

ただし、 $X \in \mathbb{R}^{v \times (n-v)}$ は次のシルベスター方程式の解とする。

$$A_{mr} X - X A_{sr} = b_{mr} c_{sr} \quad (3.72)$$

$\tilde{G}_{ms} \triangleq (\tilde{A}_{ms}, \tilde{b}_{ms}, \tilde{c}_{ms}, d) = \mathcal{T}(\tilde{G}_{d,mod}, T_{ms} T_{\mu}) = G_{mr} G_{sr}$ は次のように与えられる。

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{ms} & \tilde{b}_{ms} \\ \hline \tilde{c}_{ms} & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{mr} & b_{mr} c_{sr} & b_{mr} d \\ \mathbf{O} & A_{sr} & b_{sr} \\ \hline c_{mr} & c_{sr} & d \end{array} \right] \quad (3.73)$$

G_{mr} を v サンプルリフティングしたシステムは次のように与えられる。

$$\underline{G}_{mr} \triangleq \mathcal{L}_v G_{mr} \mathcal{L}_v^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A}_{mr} & \underline{B}_{mr} \\ \hline \underline{C}_{mr} & 0 \end{array} \right] \quad (3.74)$$

\underline{G}_{mr} の状態方程式の逆系より、シングルレート逆系の指令値 r_{sr} の指令値は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} r_{sr}[k] &= \mathcal{L}_v^{-1} (\underline{B}_{d,mr}^{-1} \hat{x}_{mr}[i_v + 1] - \underline{B}_{d,mr}^{-1} \underline{A}_{d,mr} \hat{x}_{mr}[i_v]) \\ &= \mathcal{L}_v^{-1} \underline{B}_{d,mr}^{-1} (\mathbf{I} - z^{-v} \underline{A}_{d,mr}) \hat{x}_{mr}[i_v + 1] \end{aligned} \quad (3.75)$$

ただし、 $\hat{x}_{\mu}[i_v] = S_v T_v T_{ms} T_{\mu} \hat{x}_{mod}(t)$ とする。以上より、積の分解によるマルチレートフィードフォワード制御器から生成される制御入力 u は次のように与えられる。

$$u[k] = G_{sr}^{-1} r_{sr}[k] \quad (3.76)$$

ただし、

$$G_{sr}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{sr} - b_{sr} d_{sr}^{-1} c_{sr} & b_{sr} d_{sr}^{-1} \\ \hline -d_{sr}^{-1} c_{sr} & d_{sr}^{-1} \end{array} \right] \quad (3.77)$$

とする。

\tilde{G}_{ms} を 1 サンプルシフトしたシステムは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} G_{ms} &= \mathcal{T}(G_{d,mod}, T_{ms} T_{\mu}) = \left[\begin{array}{c|c} A_{ms} & b_{ms} \\ \hline c_{ms} & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{ms} & \tilde{b}_{ms} \\ \hline \tilde{c}_{ms} \tilde{A}_{ms}^{-1} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{mr} & b_{mr} c_{sr} & b_{mr} d \\ \mathbf{O} & A_{sr} & b_{sr} \\ \hline c_{mr}^* & d_{mr}^* c_{sr}^* & d_{mr}^* d \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A_{mr} & b_{mr} \\ \hline c_{mr}^* & d_{mr}^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{sr} & b_{sr} \\ \hline c_{sr}^* & d \end{array} \right], \end{aligned} \quad (3.78)$$

ただし、 $d_{mr}^* d = 0$ であり、出力は次のように与えられる。

$$y[k] = c_{mr}^* x_{mr}[k] + d_{mr}^* c_{sr}^* x_{sr}[k] \quad (3.79)$$

ここから、マルチレート逆系は状態変数 x_{mr} に対して v

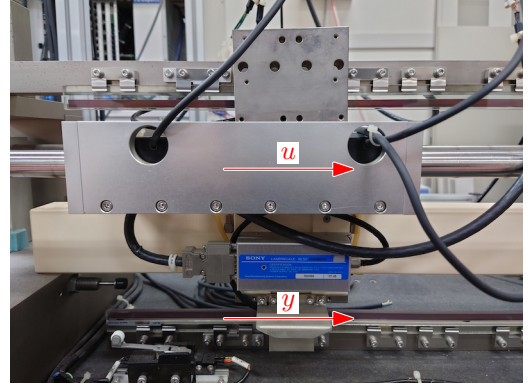


図 3.4.4 超精密位置決めステージ。入力電流 u [A] によりリニアモータの推力で駆動し、リニアエンコーダで出力変位 y [m] が測定される。

Fig. 3.4.4. High-precision positioning stage with input current u [A] generating force with linear motor and output displacement y [m] measured by linear encoder.

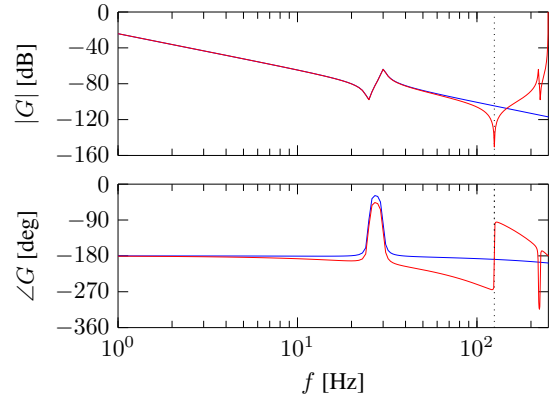


図 3.4.5 制御対象のボード線図。連続時間モデル G_c (—), 離散時間モデル G_d (—) をそれぞれ示す。垂直黒点線 (····) はナイキスト周波数を示す。

Fig. 3.4.5. Bode diagram of controlled system: continuous-time model G_c (—), and discrete-time model G_d (—). Nyquist frequency is shown in a vertical black dotted line (····).

サンプル毎に完全追従制御を達成するため、 $d_{mr}^* = 0$ の場合、出力に対する v サンプル毎の完全追従制御が達成されることがわかる。もし、分解されたシステムにおいて $d_{mr}^* \neq 0$ の場合、状態変数 x_{sr} に対する完全追従制御が保証されていないため、出力に対して完全追従制御をすることができない。したがって、 V と V_x は $d_{mr}^* = 0$ となるように選択する必要がある。

3.4.5 複数モード系における検証

検証条件

図 3.4.4 に示す検証に用いる複数モード系のモデルは次の

ように与えられる。

$$G_c(s) = \frac{2.44}{s^2} + \frac{1.1}{s^2 + 2 \times 0.024 \times (2\pi \times 30)s + (2\pi \times 30)^2}$$

$$= G_{c,mod,1}(s) + G_{c,mod,2}(s) \quad (3.80)$$

$$= \frac{3.54}{s^2} \times \frac{s^2 + 2 \times 0.02 \times (2\pi \times 25)s + (2\pi \times 25)^2}{s^2 + 2 \times 0.024 \times (2\pi \times 30)s + (2\pi \times 30)^2}$$

$$= \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \times \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad (3.81)$$

サンプリング時間を $\delta = 4 \text{ ms}$ とする。連続時間モデル G_c と離散時間モデル G_d を図 3.4.5 に示す。比較する 8 つの手法を表 3.4.1 に示す。

周波数領域における評価

周波数領域では、Performance Frequency Gain により、連続時間追従誤差を評価する。Performance Frequency Gain は、単一周波数の正弦波を指令値として規格化された定常的な連続時間追従誤差として、次のように定義される。

$$|E_r(j\omega)| = \frac{\text{RMS}(e_{j\omega}(t))}{\text{RMS}(r_{j\omega}(t))} \quad (3.82)$$

ただし、 $r_{j\omega}(t)$ はそれぞれの周波数で単一の周波数成分を持つ正弦波である。連続時間追従誤差の Performance Frequency Gain を図 3.4.6 に示す。ここから、離散化によって発生するフィードフォワード制御器の振動的な極に対処できていない手法において、ナイキスト周波数付近で大きな誤差が発生していることがわかる。低周波数では、 $|E_r|$ は Case 1 < Case 5 = Case 7 < Case 3 < Case 2 の順で小さい。これらの考察から、Case 2, Case 3, Case 5, Case 7 が望ましい手法であると分かる。

時間領域における評価

時間領域では、図 3.4.7 に示す連続時間指令値に対して、連続時間追従誤差を評価する。サンプリング時間 $0.1\delta = 0.4 \text{ ms}$ のシミュレーションにおける誤差 $e(t)$ の時間波形を図 3.4.8 に示す。誤差の平均二乗平方根 $e_{\text{RMS}} = \text{RMS}(e(t))$ を表 3.4.1 に示す。これらの結果より、ナイキスト周波数まで主に成分を持つ指令値に関して、Case 2 は（反）共振周波数に対して十分高い指令値のサンプリング周期を持つため、Case 2 において連続時間追従誤差が最も小さくなっていることがわかる。

3.4.6 まとめ

複数モード系における連続時間追従誤差に着目して複数の完全追従制御法の比較を行った。複数モード系のモデルは複数の状態変数の組み合わせとして分解することが可能であり、完全追従制御を達成する状態変数を選択することができる。複数モード系における検証において、状態追従制御により離散化によって発生するフィードフォワード制御器の振動的な極に対処することが必要であると確認された。（反）共振周波数に対してサンプリング周波数が十分高くない場合の最適なモード選択や、モデル化誤差に対するロバスト性能の検討が今後の研究課題である。

表 3.4.1 手法ごとの誤差の平均二乗平方根。 T_r は指令値のサンプリング時間を示す。 $G_{c,mr}$ と $G_{c,sr}$ はマルチレートとシングルレートの逆系のための連続時間モデルをそれぞれ示す。

Table 3.4.1. Root Mean Square error e_{RMS} in each approach. T_r is the reference sampling time. $G_{c,mr}$ and $G_{c,sr}$ are the continuous-time model for the multirate and single-rate inversion.

Case	Line	Approach	T_r	$G_{c,mr}$	$G_{c,sr}$	e_{RMS} [μm]
1	—	Single-rate	δ	-	G_c	1.1454
2	—	Multirate	4δ	G_c	-	0.3292
3	—	Additive	2δ	$G_{c,mod,1}$	-	0.3868
4	—	Additive	2δ	$G_{c,mod,2}$	-	13.4153
5	—	Multiplicative	2δ	N_1/D_1	N_2/D_2	0.3688
6	—	Multiplicative	2δ	N_2/D_1	N_1/D_2	1.1555
7	—	Multiplicative	2δ	N_1/D_2	N_2/D_1	0.3688
8	—	Multiplicative	2δ	N_2/D_2	N_1/D_1	1.1555

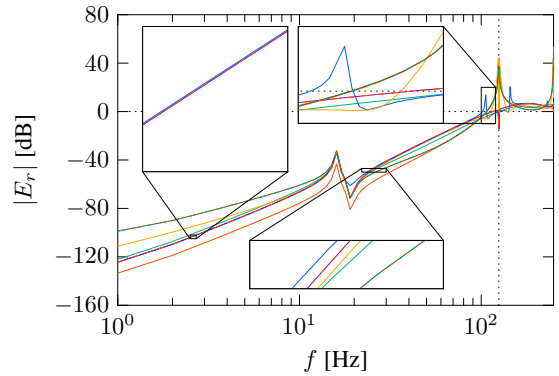


図 3.4.6 連続時間追従誤差の Performance Frequency Gain。垂直黒点線 (⋯) はナイキスト周波数を示す。

Fig. 3.4.6. Performance frequency gain of the continuous-time tracking error. Nyquist frequency is shown in a vertical black dotted line (⋯).

引用・参考文献

- (1) Tomizuka, M.: Zero Phase Error Tracking Algorithm for Digital Control, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 109, No. 1, p. 65 (1987).
- (2) Steinbuch, M., Oomen, T. and Vermeulen, H.: Motion Control, *Mechatronics Design, and Moore's Law*, *IEEJ Journal of Industry Applications*, Vol. 2, No. 4, p. 21006010 (2021).
- (3) Poot, M., Portegies, J., Mooren, N., Haren, van M., Meer, van M. and Oomen, T.: Gaussian Processes for Advanced Motion Control, *IEEJ Journal of Industry Applications*, No. 41, p. 21011492 (2022).
- (4) Hayashi, T., Fujimoto, H., Isaoka, Y. and Terada, Y.: Projection-

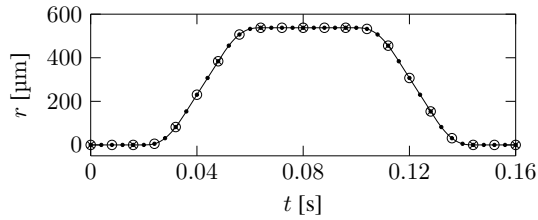


図 3.4.7 連続時間 4 次多項式軌道指令値 $r(t)$ 。(*)、(o)、(x) はそれぞれ δ 、 2δ 、 4δ のサンプリング点を示す。

Fig.3.4.7. Continuous-time 4th order polynomial trajectory reference $r(t)$. (*), (o), and (x) show sampling points every δ , 2δ , and 4δ .

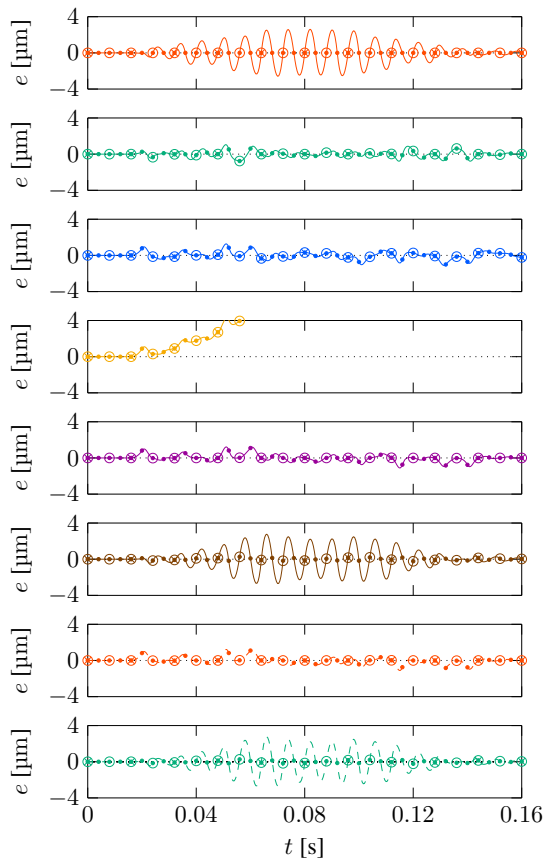


図 3.4.8 時間刻み $0.1\delta = 0.4\text{ms}$ のシミュレーションにおける誤差 $e(t)$ 。(*)、(o)、(x) はそれぞれ δ 、 2δ 、 4δ のサンプリング点を示す。

Fig.3.4.8. Error $e(t)$ in simulation with sampling time $0.1\delta = 0.4\text{ms}$. (*), (o), and (x) show sampling point every δ , 2δ , and 4δ .

based Iterative Learning Control for Ball-screw-driven Stage with Consideration of Rolling Friction Compensation, *IEEJ Journal of Industry Applications*, Vol. 9, No. 2, pp. 132–139 (2020).

- (5) Åström, K., Hagander, P. and Sternby, J.: Zeros of sampled systems, *Automatica*, Vol. 20, No. 1, pp. 31–38 (1984).
- (6) Zundert, van J. and Oomen, T.: On inversion-based approaches for feedforward and ILC, *Mechatronics*, Vol. 50, No. November 2016, pp. 282–291 (2018).
- (7) Fujimoto, H., Hori, Y. and Kawamura, A.: Perfect tracking control based on multirate feedforward control with generalized sampling periods, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 48, No. 3, pp. 636–644 (2001).
- (8) Ohnishi, W., Beauduin, T. and Fujimoto, H.: Preactuated Multirate Feedforward Control for Independent Stable Inversion of Unstable Intrinsic and Discretization Zeros, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 24, No. 2, pp. 863–871 (2019).
- (9) Ohnishi, W. and Fujimoto, H.: Multirate Feedforward Control Based on Modal Form, in *2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, No. 2, pp. 1120–1125, IEEE (2018).
- (10) Mae, M., Ohnishi, W. and Fujimoto, H.: Multirate Feedforward Control based on Modal Form with Mode Selection Applied to Multi-Modal High-Precision Positioning Stage, in *2021 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*, pp. 1–6, IEEE (2021).
- (11) Zundert, van J., Ohnishi, W., Fujimoto, H. and Oomen, T.: Improving Intersample Behavior in Discrete-Time System Inversion: With Application to LTI and LPTV Systems, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 25, No. 1, pp. 55–65 (2020).
- (12) Mae, M., Ohnishi, W. and Fujimoto, H.: Review on Multirate Feedforward Control with Mode Decomposition for Intersample Performance in Multi-Modal Motion Systems, in *The 9th IEEJ international workshop on Sensing, Actuation, Motion Control, and Optimization (SAMCON 2023)*, pp. 271–276 (2023).
- (13) Chen, T. and Francis, B. A.: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer London, London (1995).
- (14) Gawronski, W. K.: *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*, Springer, New York (2004).